Licence de Mathématiques, Géométrie Affine

TD 8 : convexité, orientation

1 On oriente $\mathbf{R}^2$. Soit $A = \{a_1 = (-2,-2), a_2 = (2,-2), a_3 = (2,2), a_4 = (-2,2)\}$, $B = \{b_1 = (-3,0), b_2 = (0,-3), b_3 = (3,0), b_4 = (0,3)\}$.
a. Dessiner les enveloppes convexes C_A de A, C_B de B et C de $A \cup B$.
b. Montrer que si $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ affine préserve A ou B alors f est linéaire.
c. Montrer que $\{g \in GL(\mathbf{R}^2) : g \text{ directe }, g(A) = A\}$ est un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.
d. Montrer que $\{g \in GL(\mathbf{R}^2) : g \text{ directe }, g(A) = B\}$ a quatre éléments et n'est pas un groupe.

2 Soit $a = (0,0), b = (1,0), c = (0,1)$.
Donner une CNS $(*)$ pour que $x = (t, 1/2 + t)$ soit dans l'enveloppe convexe C de $\{a,b,c\}$ puis faire un dessin de C et des x qui vérifient $(*)$.

3 Soit C un polygône convexe de dimension 2 de $\mathbf{R}^2$ dont les sommets sont les points $a_0, \ldots, a_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $x \in \mathbf{R}^2$ soit tel que $C \setminus \{x\}$ est convexe.

4 Soit $v_1, \ldots, v_s$ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Convexité de $C = \{t_1 v_1 + \ldots + t_s v_s : (t_1, \ldots, t_s) \in [0, +\infty[\}$?

5 Soit C et D deux convexes de $\mathbf{R}^n$.
a. Montrer que $C \times D$ est un convexe de $\mathbf{R}^{2n}$.
b. Montrer que $C + D = \{v + w : v \in C, w \in D\}$ est convexe.

6 Soit $\mathcal{A} : \mathbf{Q}^n \to \mathbf{Q}$ une forme affine définie sur $\mathbf{Q}^n$ et soit C un polyèdre convexe. Montrer qu'il existe des sommets p_{min} et p_{max} de C tels que $\mathcal{A}(C) = [\mathcal{A}(p_{min}), \mathcal{A}(p_{max})]$.

7 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension trois orienté et $\mathcal{H}$ un hyperplan affine. Montrer que si $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{E}$ injection affine alors il existe $\mathcal{B} \in GA(\mathcal{E})$ qui préserve l'orientation et dont la restriction à $\mathcal{H}$ coïncide avec $\mathcal{A}$.

8 $M \in M_n(\mathbf{Q})$ symétrique est positive si et seulement si pour tout $v \in \mathbf{Q}^n$, $v^t M v \geq 0$.
a. Montrer que l'ensemble C des matrices positives est convexe.
b. Montrer que si $M \in C$ et $A \in GL(\mathbf{Q}^n)$ alors $A^t M A \in C$.

9 a. Montrer que $(ta + (1-t)b)^2 - (ta^2 + (1-t)b^2) = t(t-1)(a^2 + b^2)$.
b. Montrer que si $t \in [0,1]$ et $a \leq b$ sont deux réels alors $(ta + (1-t)b)^2 \leq ta^2 + (1-t)b^2$.
c. Montrer que l'ensemble $\{(x_1, \ldots., x_n) : x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$ de $\mathbf{R}^n$ est convexe.

10 Soit (a,b,c) un triangle de $\mathbf{R}^2$ et C son enveloppe convexe. Montrer que si a', b' sont des points de C non contenus dans les arêtes de C alors les droites aa' et bb' s'intersectent en un point de C non contenu dans une arête de C.

11 On oriente $\mathbf{R}^2$. Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ trois droites de $\mathbf{R}^2$, distinctes et concourantes en un point o. Soit une quatrième droite Δ de $\mathbf{R}^2$ qui coupe les δ_i mais qui ne contient pas o. Soient aussi $a_i, b_i \in \delta_i, i = 1,2,3$ des points distincts. On suppose que $a_1a_2 \cap b_1b_2, a_2a_3 \cap b_2b_3$, et $a_3a_1 \cap b_3b_1$ sont des singletons de Δ. On suppose que a_i est dans le segment $[ob_i]$ si $i = 1,2,3$. On suppose enfin que a_1 est dans l'enveloppe convexe de $\{o, a_2, a_3\}$.
On pourra illustrer chaque réponse d'un dessin.
a. Quelles sont les arêtes de l'enveloppe convexe des points a_2, b_2, a_3, b_3.
b. Montrer que $(\overrightarrow{oa_2}, \overrightarrow{oa_3})$ est directe si et seulement si $(\overrightarrow{a_1a_2}, \overrightarrow{a_1a_3})$ est directe.
c. Montrer que b_1 n 'est pas dans l'enveloppe convexe de $\{o, b_2, b_3\}$ si et seulement si Δ rencontre l'enveloppe convexe des points a_2, a_3, b_2, b_3.
d. Que parcourt b_1 lorsque a_1 parcourt l'intersection de δ_1 et de l'enveloppe convexe de $\{o, a_2, a_3\}$.