Licence de Mathématiques, Géométrie Affine

TD 7 : repère affine, barycentre et coordonnées barycentriques

1 Soit (a,b,c) un repère affine d'un plan et a',b',c' les milieux de $(b,c),(c,a),(a,b)$. Soit $x \in bc, y \in ca, z \in ab$ et x',y',z' les milieux de $(a,x),(b,y),(c,z)$.
a. Montrer que (a',b',c') est un repère affine.
b. Exprimer les coordonnées barycentriques de x',y' et z' dans le repère (a',b',c') en fonction de celles de x,y et z dans le repère (a,b,c).
c. Montrer que x,y et z sont alignés si et seulement si x',y' et z' le sont.

2 Soit (a,b,c) un triangle et a',b',c' les milieux de $(b,c),(c,a),(a,b)$. Montrer à l'aide de barycentres que les médianes aa',bb' et cc' sont concourantes.

3 Soit $(p_0,\ldots,p_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$ et soit p et q deux points distincts de $\mathcal{E}$ de coordonnées barycentriques x et y. Montrer que les points de la droite pq sont les points de coordonnées barycentriques $tx+(1-t)y, t \in \mathbf{K}$.

4 Soit $\mathcal{P}$ un plan affine et (p_0,p_1,p_2) un repère. On note $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$ les coordonnées barycentriques dans ce repère. Soit $\delta_i, i = 1,2,3$ trois droites de $\mathcal{P}$. .
a. Montrer qu'il existe des formes linéaires L_i définies sur $\mathbf{K}^3$ telle que $p \in \delta_i$ si et seulement si les coordonnées barycentriques de p sont dans $\ker L_i$.
b. Montrer que $\delta_1 \parallel \delta_2$ si et seulement si $\ker L_1 \cap \ker L_2 \subset \{\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2 = 0\}$.
c. Montrer que δ_1,δ_2 et δ_3 sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\det(L_1,L_2,L_3) = 0$.

5 Démontrer le théorème de Menelaüs à l'aide de coordonnées barycentriques.

6 Démontrer le théorème de Ceva à l'aide de barycentres.

7 Soit $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine, $(p_1,\ldots,p_r)$ un r-uplet de points de $\mathcal{E}$ et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r) \in \mathbf{K}^r$ tels que $\sum \lambda_i \neq 0$. Montrer que si b est le barycentre des $(p_i,\lambda_i)_{i\in\{1,..,r\}}$ alors $\mathcal{A}(b)$ est le barycentre des $(\mathcal{A}(p_i),\lambda_i)_{i\in\{1,..,r\}}$.

8 Soit $(p_0,\ldots,p_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$.
a. Soit p et q deux points distincts de $\mathcal{E}$ de coordonnées barycentriques x et y. Montrer que les points de la droite xy sont les points de coordonnées barycentriques $tx+(1-t)y, t \in \mathbf{K}$.
Soit $(q_1,..,q_s)$ une famille de points de coordonnées barycentriques $x_i, i = 1,..,s$.
b. Montrer que les points du sous-espace affine engendré par les q_i sont les points de coordonnées barycentriques $\sum \lambda_i x_i$ avec $\sum \lambda_i = 1$.
c. Montrer que $(q_1,..,q_s)$ est une famille de points affinement indépendants ssi $(x_1,\ldots,x_s)$ est libre.
d. Montrer que $(q_1,..,q_s)$ est une famille affinement génératrice ssi $(x_1,\ldots,x_s)$ engendre l'espace $\mathbf{K}^{n+1}$.
e. Montrer que si $\mathcal{E}'$ est un sous-espace affine de codimension p de $\mathcal{E}$ il existe une application linéaire $L : \mathbf{K}^{n+1} \to \mathbf{K}^p$ telle que les points q de $\mathcal{E}'$ sont les points de $\mathcal{E}$ de coordonnées barycentriques dans $\ker L$.
f. Soit $L : \mathbf{K}^{n+1} \to \mathbf{K}^p$ une application linéaire de rang p. Montrer que l'ensemble des points q de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées barycentriques sont dans le noyau de L est un sous espace affine de codimension p de $\mathcal{E}$ s'il n'est pas vide.