Licence de Mathématiques, Géométrie Affine

TD 6 : groupe affine, Menelaüs, Pappus, Desargues

1 Illustrer les théorèmes de Thalès, Pappus, Desargues, Menelaüs et Ceva à l'aide de configurations de points dans $\mathbf{Q}^2$.

2 Soit $(p_0, \ldots, p_n)$ un repère affine de $\mathbf{R}^n$ tel que $p_0 + \ldots + p_n = 0$.
a. Montrer que $p_1, \ldots, p_n$ sont n vecteurs indépendants de $\mathbf{R}^n$.
b. Montrer que si σ est une permutation de $\{0, \ldots, n\}$, il existe une unique application linéaire A_σ telle que $A_\sigma(p_i) = p_{\sigma_i}$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$. Calculer $A_\sigma(p_0)$.
c. Montrer que toute application affine qui permute les p_i est une A_σ.
d. Montrer que si σ est la transposition $(0,i)$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ alors A_σ est une symétrie hyperplane par rapport à l'hyperplan vectoriel H_i engendré par les vecteurs p_j, $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$.
e. Montrer que l'intersection des H_j est réduit à l'origine et en déduire que l'origine est l'unique point fixe commun à toute les applications affines qui permutent les p_i.

3 Soient $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ et a_1, a_2, a_3 un triangle de $\mathbf{R}^2$. Si $i = 1,2,3$ on note h_i l'homothétie de centre a_i et de rapport λ.
a. Montrer que $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$ est une homothétie différente de l'identité.
b. On note b_1 le point fixe de h, $b_2 = h_1(b_1)$ et $b_3 = h_2(b_2)$. Montrer que b_2 et b_3 sont les uniques points fixes de $h_1 \circ h_3 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1 \circ h_3$.
c. Montrer que $(1-\lambda)a_i = b_{i+1} - \lambda b_i$ si $i = 1,2,3$ (en posant "$4 = 1$").
d. Montrer que $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$.
e. Interpréter lorsque $\lambda = -1$.

4 Soit $a_1, \ldots, a_n$ des points de $\mathbf{R}^2$. Pour $i = 1, \ldots, n$ on note h_i l'homothétie de centre a_i de rapport -1. On pose $h = h_n \circ \ldots \circ h_1$.
a. Montrer que si n est impair h admet un unique point fixe.
b. Montrer que si n pair h est l'identité ou une translation. Donner des exemples.
c. Discuter l'existence de polygônes à n cotés dont les milieux des cotés sont les a_i.

5 (Pappus) Soit δ et δ' deux droites d'un plan affine $a, b, c \in \delta$ et $a', b', c' \in \delta'$. On suppose que $ab' \cap a'b$, $bc' \cap b'c$ et $ca' \cap c'a$ sont trois singletons notés γ, α, et β et que $ab' \cap a'c$, $bc' \cap b'a$ et $ca' \cap c'b$ sont trois singletons notés p, q et r.
a. Montrer que p, q, r est un triangle.
b. Traduire à l'aide de Menelaüs appliqué dans le triangle p, q, r l'alignement des triplets (a, b, c), (a', b', c'), (a', b, γ), (b', c, α) et (c', a, β).
c. En déduire, toujours à l'aide de Menelaüs, que α, β et γ sont alignés.

6 (Desargues) Soient $a_i, b_i, i = 1,2,3$ des points distincts d'un plan affine. On suppose que a_1a_2 et b_1b_2 s'intersectent en c_3, a_2a_3 et b_2b_3 s'intersectent en c_1 et a_1a_3 et b_1b_3 s'intersectent en c_2. On suppose aussi que les droites a_ib_i sont concourantes en o.
a. Traduire à l'aide de Menelaüs appliqué aux triangles o, a_i, a_j, $i \neq j$, l'alignement des triplets (b_1, b_2, c_3), (b_2, b_3, c_1) et (b_3, b_1, c_2).
b. En déduire l'alignement de c_1, c_2 et c_3.

7 Soient δ et δ' les traces de droites concourantes dessinées sur une feuille et p un point de la feuille en dehors de δ et δ'. On suppose que le point d'intersection o des deux droites est hors de la feuille. Dessiner à l'aide d'une règle la trace sur la feuille de la droite op.

8 Comment tracer avec une règle trop courte le segment reliant deux points d'une feuille.

9 Soit a, b, a', b' et c cinq points sur une feuille. On suppose $a \neq b$ et $c \in ab$. Construire à l'aide de parallèles le point c' de $a'b'$ tel que $\overrightarrow{a'c'} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{ab}} \overrightarrow{a'b'}$.