Licence de Mathématiques, Géométrie Affine

TD 5 : applications affines et groupe affine

1 Soient (A,B,C) un repère affine d'un plan affine et B_1 un point de AC différent de A et C.
On note C_1 l'intersection de AB et de la parallèle à CB qui passe par B_1.
On note A_1 l'intersection de BC et de la parallèle à AC qui passe par C_1.
On note B_2 l'intersection de CA et de la parallèle à BA qui passe par A_1.
On note C_2 l'intersection de AB et de la parallèle à CB qui passe par B_2.
On note A_2 l'intersection de BC et de la parallèle à AC qui passe par C_2.
On note B_3 l'intersection de CA et de la parallèle à BA qui passe par A_2.
a. Faites une figure.
b. Montrer que la suite $B_1,C_1,A_1,B_2,C_2,A_2,B_3$ est bien définie.
c. Montrer que $B_1 = B_3$.

2 Soit $\mathcal{P}$ un plan affine.
a. Montrer que le produit d'un nombre pair de symétries ponctuelles est une translation et que le produit d'un nombre impair de symétries ponctuelles est une symétrie ponctuelle.
b. Soit δ une droite de $\mathcal{P}$. Quelles sont les applications affines $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{A}^2 = Id$ et $\mathcal{A}(\delta) = \delta$.

3 Soient $\mathcal{F}$ le plan affine $\{z=1\}$ de $\mathbf{R}^3$, δ et δ' deux droites affines distinctes de $\mathcal{F}$, P et P' deux plans vectoriels distincts de $\mathbf{R}^3$.
a. Montrer que si G linéaire envoie trois points de $\mathcal{F}$ dans $\{z=0\}$ alors G est non inversible ou les trois points sont alignés.
b. Soit δ une droite de $\mathcal{F}$ et $p \in \mathcal{F} \setminus \delta$. Montrer que si G linéaire envoie δ et p dans $\{z=0\}$ alors G n'est pas inversible.
c. Montrer que trois points différents p_1,p_2,p_3 de $\mathcal{F}$ sont alignés si et seulement si $\mathrm{Vect}\{p_1,p_2,p_3\}$ est un plan.
d. Montrer que trois points différents p_1,p_2,p_3 de $\mathcal{F}$ sont alignés si et seulement s'il existe $G \in GL(\mathbf{R}^3)$ tel que $G(p_i) \in \{z=0\}$ si $i=1,2,3$.
e. Montrer que $\delta \parallel \delta'$ si et seulement si $\mathrm{Vect}\,\delta \cap \mathrm{Vect}\,\delta' \subset \{z=0\}$.
f. On suppose que $\delta = P \cap \mathcal{F}$ et $\delta' = P' \cap \mathcal{F}$. Montrer qu'il existe $G \in GL(\mathbf{R}^3)$ tel que $G(P) \cap \mathcal{F}$ et $G(P') \cap \mathcal{F}$ soient deux droites parallèles (même question avec concourantes).
g. Soient $a,b,c \in \delta$ et $a',b',c' \in \delta'$. On suppose les droites ab' et ba' concourantes en p_1, les droites bc' et cb' concourantes en p_2, et les droites ca' et ac' concourantes en p_3. Montrer que p_1,p_2 et p_3 sont alignés.

4 Montrer qu'une application affine de $\mathbf{R}^2$ est le produit d'au plus quatre affinités.

5 Soit $\mathcal{E}$ de dimension finie, $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to$ affine et A l'application linéaire associée. Montrer que $\mathcal{A}$ a un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de A.

6 Soit $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ affine telle que le déterminant de la partie linéaire de $\mathcal{A}$ soit 1 ou -1.
a. Montrer que si $\mathcal{A}$ fixe point par point un hyperplan affine alors $\mathcal{A}$ est une transvection ou une symétrie hyperplane.
b. Montrer qu'une translation est le produit de deux symétries hyperplanes.
c. Soit $\mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathbf{R}^n$ de codimension au moins 2. Soient $a \neq b \in \mathbf{R}^n$ tels que $b \notin < \{a\} \cup \mathcal{E} >$ et $a \notin < \{b\} \cup \mathcal{E} >$. Montrer qu'il existe un hyperplan affine $\mathcal{H}$ qui contient $\mathcal{E}, (a+b)/2$ et qui ne rencontre ni a ni b. Montrer qu'il existe une symétrie de base $\mathcal{H}$ qui échange a et b.
d. Montrer que $\mathcal{A}$ est la composée de symétries hyperplanes. On pou