Licence de Mathématiques, Géométrie Affine

TD 4 : parallélograme, intersection, repère affine, théorème d'incidence, applications affines

1 Montrer que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^3$ n'est linéaire.

2 a. Donner trois droites parallèles qui ne sont contenues simultanément dans aucun plan.
Soient δ_1, δ_2 et δ_3 trois droites parallèles contenues dans un plan $\mathcal{P}$. Soit δ et δ' deux droites de $\mathcal{P}$, parallèles et de direction différente de celle des précédentes.
b. Faites une figure représentant la situation décrite.
c. Montrer que les intersections de δ_i avec δ ou δ' sont des singletons notés a_i et a'_i.
d. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\overrightarrow{a_1 a_2} = \lambda \overrightarrow{a_1 a_3}$ et $\overrightarrow{a'_1 a'_2} = \lambda \overrightarrow{a'_1 a'_3}$.

3 Soit $\delta_0 = \{y = z = 0\} \subset \mathbf{R}^3$ et $\delta_1 = \{x = z - 1 = 0\} \subset \mathbf{R}^3$.
a. Quel est le sous-espace affine $< \delta_0 \cup \delta_1 >$?
b. Montrer que si $i = 0, 1$ il existe un unique plan affine $\mathcal{P}_i$ tel que $\delta_i \subset \mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}_i \cap \delta_{1-i} = \emptyset$.
c. Faire un dessin décrivant la situation.
d. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}_i$ si $i = 0, 1$.
e. Montrer que la réunion X des droites affines δ de $\mathbf{R}^3$ telles que $\delta \cap \delta_i \neq \emptyset$ si $i = 0, 1$ est $X = (\mathbf{R}^3 \setminus (\mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1)) \cup (\delta_0 \cup \delta_1)$.

4 Soit δ et δ' deux droites distinctes de $\mathbf{R}^3$ dirigées respectivement par Δ et Δ'.
a. On suppose $\Delta \cap \Delta' = \{0\}$. Donner une CNS pour que $< \delta \cup \delta' > = \mathbf{R}^3$.
b. On suppose que $\Delta \cap \Delta' \neq \{0\}$. Montrer que $< \delta \cup \delta' >$ est un plan.

5 Soient $\mathcal{P}$ un plan affine dirigé par P, $D \subset P$ une droite vectorielle, O un point de $\mathcal{P}$ et δ_1, δ_2 deux droites affines de $\mathcal{P}$ qui ne sont pas dirigées par D et qui ne rencontrent pas O.
a. Montrer que toute droite affine Δ dirigée par D coupe chaque δ_i en un point exactement.
b. Montrer que l'application qui à $a_1 \in \delta_1$ associe l'unique point d'intersection de δ_2 avec la droite qui passe par a_1 et qui est dirigée par D est un isomorphisme affine entre δ_1 et δ_2.
c. On suppose les δ_i parallèles. Montrer que si $a_1 \in \delta_1$ alors la droite Oa_1 coupe δ_2 en un unique point $a_2 = h(a_1)$ et que l'application h ainsi définie est un isomorphisme affine entre δ_1 et δ_2.

6 Soit $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine et $(p_0, \ldots, p_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$.
a. Soit $p \in \mathcal{E}$. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que $\overrightarrow{p_0 p} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{p_0 p_i}$.
b. Exprimer $\mathcal{A}(p)$ en fonction des $\mathcal{A}(p_i)$ et des λ_i.

7 a. Montrer qu'une droite affine de $\mathbf{K}^2$ est de la forme $\{ax + by + c = 0\}$ où $(a, b) \neq (0, 0)$.
b. Soient $\delta_i = \{a_i x + b_i y + c_i\}$ trois droites de $\mathbf{K}^2$. Montrer que δ_1, δ_2 et δ_3 sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = 0$$

8 Soit $\mathbf{K}$ l'ensemble $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$ muni des deux lois $+_{\mathbf{K}}$ et $\times_{\mathbf{K}}$ suivantes : si $a, b, c, d \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ on pose $(a, b) +_{\mathbf{K}} (c, d) = (a + c, b + d)$ et $(a, b) \times_{\mathbf{K}} (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
a. On pose $\xi = (0, 1)$. Montrer que $(1, 0)$ est le neutre de $\times_{\mathbf{K}}$ et que $\xi^2 + (1, 0) = (0, 0)$.
b. Montrer que $(\mathbf{K}, +_{\mathbf{K}}, \times_{\mathbf{K}})$ est un corps commutatif.
c. Soit $\phi : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ définie par $\phi(a, b) = (a, 2b)$. Montrer que ϕ est additive, c'est à dire $\phi((a, b) +_{\mathbf{K}} (c, d)) = \phi(a, b) +_{\mathbf{K}} \phi(c, d)$.
d. Montrer que ϕ n'est pas linéaire.

9 Montrer que $p_i = (x_i, y_i), i \in \{1, 2, 3\}$ sont alignés si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$