Licence de Mathématiques, Géométrie Affine

TD 3 bis : équation cartésienne, paramétrisation affine

1 Donner une paramétrisation affine et un système d'équations cartésiennes qui définissent la droite de $\mathbf{R}^3$ qui contient les points $(1,1,1)$ et $(2,3,4)$.

2 Soit $A=(2,1)$, $\delta=\{(t,1+t) : t\in\mathbf{R}\}$ et $d=\{x+y+1=0\}$.
a. Donner un point, un vecteur directeur et une équation cartésienne de δ.
b. Donner un point, un vecteur directeur et une paramétrisation affine de d.
On note Δ_t la droite qui passe par A et le point $(t,1+t)$.
c. Donner un vecteur directeur, une paramétrisation affine et une équation cartésienne de Δ_t.
d. Montrer qu'il existe un et un seul t tel que Δ_t soit parallèle à d.
e. Calculer le point d'intersection de d et Δ_t lorsqu'elles ne sont pas parallèles.

3 Soient $A=(1,1,1)$, $B=(1,0,0)$ et $C_t=(0,1,t)$ si $t\in\mathbf{R}$.
a. Montrer que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC_t})$ est libre.
b. Trouver $\alpha_t,\beta_t,\gamma_t\in\mathbf{R}$ tels que si $v=(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ alors $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC_t},v)$ est lié si et seulement si $\alpha_t x+\beta_t y+\gamma_t z=0$.
c. Montrer qu'il existe un unique plan affine $\mathcal{P}_t$ qui contient A,B,C_t et donner sa direction.
d. Trouver une paramétrisation affine de $\mathcal{P}_t$.
e. Trouver une équation cartésienne de $\mathcal{P}_t$.
f. Montrer qu'il existe un et un seul t tel que $\mathcal{P}_t$ soit un plan vectoriel.

4 a. Montrer que deux plans affines non parallèles de $\mathbf{R}^3$ se coupent le long d'une droite.
Soit $\mathcal{P}$ le plan affine déquation $x+y+z=1$.
b. Soit $v=(a,b,c)\in\mathbf{R}^3\setminus\{0\}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le plan $\mathcal{P}_v$ d'équation $ax+by+cz=0$ et $\mathcal{P}$ ne soient pas parallèles.
c. Soient $v=(a,b,c)$ et $v'=(a',b',c')$ tels que $\mathcal{P}_v$ et $\mathcal{P}_{v'}$ soient non parallèles à $\mathcal{P}$. Montrer que $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}_v$ et $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}_{v'}$ sont des droites parallèles si et seulement si

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix}=0.$$