Licence de Mathématiques, Géométrie Affine

TD 3 : espaces affines et sous-espaces

1 Soit $v=(1,0,1)$ et $w=(1,1,1)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$.
a. Quelle est la dimension du plus petit sous-espace affine qui contient v et w ?
b. Montrer que le plus petit sous-espace vectoriel qui contient v et w est un plan F.
c. Trouver une forme linéaire L tel que $\ker L = F$.
d. Donner un équation cartésienne du sous-espace affine qui passe par $u=(0,2,1)$ et qui est dirigé par F.

2 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{F}$ des sous-espaces affines dirigés par E_1 et F. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un sous-espace affine $\mathcal{E}_2$ qui contienne $\mathcal{E}_1$ et qui soit parallèle à $\mathcal{F}$.

3 Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction F. Montrer que $\dim \operatorname{Vect} \mathcal{F} \leq \dim F + 1$ et que dans le cas de la dimension finie il y a inégalité stricte si et seulement si $F = \mathcal{F}$.

4 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E et $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$. On pose $F = \{\overrightarrow{xy} : x, y \in \mathcal{F}\}$.
a. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ alors F est un sous-espace vectoriel de E.
b. On considère la droite affine $\mathcal{E} = \mathbf{R}$ et le sous-ensemble $\mathcal{F} =]0, +\infty[$. Que vaut F dans ce cas ? Que conclure ?

5 Soit E un espace vectoriel, E_1, E_2, E_3 des sous-espaces vectoriels. On suppose que $E = E_1 \oplus E_2 = E_1 \oplus E_3$.
a. Montrer que par tout point de E_2 passe un unique sous-espace affine $\mathcal{E}'_x$ parallèle à E_1.
b. Montrer que si $\mathcal{E}'$ est un sous-espace affine parallèle à E_1 alors $\mathcal{E}' \cap E_2$ et $\mathcal{E}' \cap E_3$ sont des singletons.
c. Montrer que l'application qui à $x \in E_2$ associe l'unique point d'intersection de $\mathcal{E}'_x$ et E_3 est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

6 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E. On suppose que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à un point. On note $E^{\mathcal{E}}$ l'espace vectoriel des applications de $\mathcal{E}$ dans E. Si $x \in \mathcal{E}$ on note f_x l'élément de $E^{\mathcal{E}}$ qui à $y \in \mathcal{E}$ associe $\overrightarrow{xy}$. On définit ainsi une application f de $\mathcal{E}$ dans $E^{\mathcal{E}}$.
a. Montrer que l'application c qui à $v \in E$ associe l'application $c_v : \mathcal{E} \to E$ constante égale à v est une application linéaire injective de E dans $E^{\mathcal{E}}$.
b. Montrer que l'application f est une injection de $\mathcal{E}$ dans $E^{\mathcal{E}}$.
c. Montrer que $f_x - f_y = \overrightarrow{xy}$.
d. Montrer que $f(\mathcal{E})$ est un sous-espace affine de $E^{\mathcal{E}}$ dirigé par $c(E)$.
e. Décrire les éléments de l'espace vectoriel $\operatorname{Vect} f(\mathcal{E})$ et montrer que $f(\mathcal{E})$ est un hyperplan affine de $\operatorname{Vect} f(\mathcal{E})$.