Licence de Mathématiques, Géométrie Affine

TD 2 : groupes, corps, espaces vectoriels et affines

1 Soit $\phi : (G_1, *_1) \to (G_2, *_2)$. Montrer que $\phi(e_{G_1}) = e_{G_2}$ et que $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$.

2 Décrire tous les sous-groupes du groupe $\mathcal{S}_3$ des permutations de $\{1,2,3\}$.

3 a. Soit $S = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}|$. Montrer que l'application $\phi : \mathbf{R} \times S \to S$ définie par $\phi(\theta, z) = \exp(i\theta)z$ est une action transitive qui n'est pas simple.
b. Soit $C = \{1, -1, i, -i\}$ et soit $n \in \mathbf{N}$. A quelle condition l'application $\psi : \mathbf{Z} \times C \to C$ définie par $\psi(k,z) = \exp(i\frac{\pi}{2}nk)z$ est transitive.

4 Le corps H des quaternions Soit $\mathbf{H} = \{\psi(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} : (x,y) \in \mathbf{C}^2\}$.
a. Montrer que $\mathbf{H}$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension 2 et que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$.
b. Montrer que $\mathbf{H}$ est un $\mathbf{R}$-sous-espace vectoriel de l'espace des matrices $(2,2)$ à coefficients complexes mais que ce n'est pas un $\mathbf{C}$-sous-espace vectoriel de cet espace.
c. Montrer que $\mathbf{H}$ est stable par composition des matrices.
d. Montrer que tout élément non nul de $\mathbf{H}$ admet un inverse dans $\mathbf{H}$ pour la composition.
e. Montrer que $\mathbf{H}$ est un corps non commutatif.

5 Théorème du rang Soit $L : E \to F$ une application linéaire.
a. Soit b une base de $\ker L$. Montrer qu'il existe une famille libre $b' \subset E$ telle que (b, b') soit une base de E.
b. Montrer que E est la somme directe de $\ker L$ et de $\mathrm{Vect}\, b'$.
c. Montrer que $\mathrm{Im}\, L = L(\mathrm{Vect}\, b')$.
d. Montrer que $L' : \mathrm{Vect}\, b' \to \mathrm{Im}\, L$ définie par $L'(x) = L(x)$ si $x \in \mathrm{Vect}\, b'$ est un isomorphisme. e. En déduire que $\dim E = \dim \ker L + \dim \mathrm{Im}\, L$.

6 Espace affine et application linéaire Soit une application linéaire $L : E \to F$ et $b \in \mathrm{Im}\, L$. Soit $\mathcal{E} = L^{-1}(b)$.
a. Montrer que si $x \in \mathcal{E}$ et $v \in \ker L$ alors $x + v \in \mathcal{E}$.
b. Montrer que si $x, x' \in \mathcal{E}$ il existe un unique vecteur $v \in \ker L$ tel que $x + v = x'$.
c. Montrer que l'application de $\ker L \times \mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui a (v,x) associe $x + v$ confère à $\mathcal{E}$ une structure d'espace affine dirigé par $\ker L$.
Soit $L' : E \to F'$ une seconde application linéaire et soit $\mathcal{F} = L'(\mathcal{E})$.
d. Montrer que si $y \in \mathcal{F}$ et $w \in L'(\ker L)$ alors $y + w \in \mathcal{F}$.
e. Montrer que si $y, y' \in \mathcal{F}$ il existe un unique vecteur $w \in L'(\ker L)$ tel que $y + w = y'$.
f. Montrer que l'application de $L'(\ker L) \times \mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ qui a (w,y) associe $y + w$ confère à $\mathcal{F}$ une structure d'espace affine dirigé par $L'(\ker L)$.

7 Réunion finie de sous-espaces vectoriels Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$ infini et soit $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
a. Montrer que si $x \in E_1$ et $v \notin E_1$ alors $x + \lambda v \notin E_1$ pour tout $\lambda \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$.
b. Montrer que si $x \in E_1, v \in E_2 \setminus E_1$ et $x + v \in E_2$ alors $x \in E_2$.
c. Montrer que si $x \in E$ et $v \in E \setminus E_1$ alors il existe au plus un $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $x + \lambda v \in E_1$.
d. Montrer que si $v \in E_n \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_{n-1})$ et $x \in (E_1 \cup \ldots \cup E_{n-1})$ alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $x + \lambda v \notin (E_1 \cup \ldots \cup E_{n-1})$.
e. Montrer par récurrence sur n que si $E_1 \cup \ldots \cup E_n = E$ alors l'un des E_i est égal à E.