Licence de Mathématiques, Géométrie Affine

TD 1 : le plan affine arguésien [10], [11], [15]

L'objet de ce TD inspiré de [15] est de montrer que le plan affine axiomatisé par Euclide et Desargues est naturellement muni d'une structure de plan vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$ dès qu'on a marqué une origine.

Soit $\mathbf{P}$ un ensemble non vide et $\mathcal{D}$ un ensemble non vide de parties non vides et distinctes de $\mathbf{P}$. On suppose que si $p \neq q \in \mathbf{P}$ il existe un unique élément de $\mathcal{D}$ noté pq tel que $p, q \in pq$ (*). On suppose aussi que si $p \in \mathbf{P}$, $\delta \in \mathcal{D}$ et $p \notin \delta$ il existe un unique $\delta' \in \mathcal{D}$ tel que $p \in \delta'$ et $\delta \cap \delta'$ est vide (**). Ce sont les axiomes d'incidence d'Euclide.

Les éléments de $\mathbf{P}$ sont appelés *points*, ceux de $\mathcal{D}$ sont appelés *droites* et $\mathcal{P}$ est appelé *plan*. On dit qu'une droite δ *passe par* un point p si $p \in \delta$. Des points sont dits *alignés* s'il existe une droite qui passe par ces points. Des droites sont dites *concourantes* si elles ont un point commun. Deux droites sont dites *parallèles* si leur intersection est vide ou si elles sont égales.

Vérifiez les affirmations suivantes.

1 Deux droites distinctes ont au plus un point commun.

2 Le parallélisme est une relation d'équivalence.

3 Il existe au moins trois points non alignés.

4 Soit p, q, r trois points non alignés. Il existe un et un seul point s tel que pq et sr sont parallèles ainsi que ps et qr. On dit que (p, q, r, s) forment un parallélogramme.

5 Soit δ et δ' deux droites concourantes en p et q hors de δ et δ'. Montrer qu'il existe un unique couple $(u, u') \in \delta \times \delta'$ tels que (p, u, q, u') forme un parallélogramme.

6 Les droites ont toutes le même cardinal et il est supérieur ou égal à 2.

7 Si une droite contient exactement deux points alors $\mathbf{P}$ contient exactement quatre points et il existe six droites exactement.

On suppose dorénavant que les droites ont au moins trois éléments et on choisit un point noté O et un autre noté i et on note $\mathbf{K}$ la droite Oi.

On suppose de plus (axiome de Desargues). Si $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sont trois droites distinctes, concourantes ou parallèles, $a_i, b_i \in \delta_i, i = 1, 2, 3$ sont des points distincts de l'éventuel point commun aux trois droites et si a_1a_2 et b_1b_2 sont parallèles ainsi que a_2a_3 et b_2b_3 alors a_1a_3 et b_1b_3 sont parallèles.

Vérifiez les affirmations suivantes.

8 Il existe une unique loi interne notée $+$ telle que :

- $(\mathbf{P}, +)$ est un groupe commutatif dont le neutre est O
- si u et v sont deux points tels que O, u et v sont non alignés alors $u + v$ est l'unique point tel que $(O, u, u + v, v)$ forme un parallélogramme.

9 Si δ est une droite et u un point alors $u + \delta = \{u + v : v \in \delta\}$ est une droite parallèle à δ.

10 La loi $+$ induit sur $\mathbf{K}$ une structure de sous-groupe commutatif.

11 Si $x \in \mathbf{K}$ et $x \neq O$ il existe une unique bijection h_x de $\mathbf{P}$ dans $\mathbf{P}$ telle que $h_x(O) = O, h_x(i) = x$ et qui envoie toute droite sur une droite parallèle. On pose $x_x(u) = x \cdot u$ si $u \in \mathbf{P}$.

12 L'ensemble H des $h_x, x \in \mathbf{K} \setminus \{O\}$ est stable par composition et $(H, \circ)$ est un groupe dont le neutre est h_i.

13 Si $x, y \in \mathbf{K} \setminus \{O\}$ il existe un unique élément noté $x * y$ de $\mathbf{K} \setminus \{O\}$ tel que $h_x \circ h_y = h_{x*y}$.

14 L'ensemble $\mathbf{K} \setminus \{O\}$ muni de $*$ est un groupe dont le neutre est i et $(\mathbf{K}, +, *)$ est un corps.

15 $(\mathbf{P}, +, \cdot)$ est un plan vectoriel sur $\mathbf{K}$ et les droites de $\mathbf{P}$ sont les droites *affines*.