Université de Rennes I **Licence de Mathématiques**

Géométrie affine (E05) **Janvier 2005**

Examen - 1ère session - 2heures

Les documents, ordinateurs, téléphones et calculatrices sont interdits.

I (5pts)

1 Définition d'un espace affine.

2 Énoncé du théorème de Desargues.

3 Énoncé du théorème d'incidence.

II (5pts) Soit a_1, a_2, a_3, a_4 quatre points de $\mathbf{R}^2$. Si $i, j \in \{1,2,3,4\}$ on note b_{ij} le milieu de (a_i, a_j) et h_i l'homothétie de centre a_i et de rapport $\frac{1}{2}$.

1 Soit $i, j, k \in \{1,2,3,4\}$ distincts. Vérifier que $h_i(a_j) = b_{ij} = b_{ji}$. En déduire que la droite $b_{ij}b_{ik}$ est parallèle à la droite a_ja_k puis que $(b_{12}, b_{23}, b_{34}, b_{41})$ est un parallélogramme.

2 Montrer que le milieu M de (b_{12}, b_{34}) est confondu avec le milieu de (b_{23}, b_{41}).

3 Montrer que M est le milieu de (b_{13}, b_{24}).

4 Montrer que M est l'isobarycentre des points a_1, a_2, a_3, a_4.

5 Faire une figure illustrant la situation.

III (5pts) Dans $\mathbf{R}^2$ on considère $p_0 = (0,0)$, $p_1 = (1,0)$, $p_2 = (0,1)$ et les droites affines $\delta_1 = p_0p_1$ et $\delta_2 = p_0p_2$. Soit aussi $q = (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus (\delta_1 \cup \delta_2)$.

1 Montrer que $\delta = \{(x - yt, y + xt) : t \in \mathbf{R}\}$ est une droite affine qui passe par q.

2 Montrer que si $i \in \{1,2\}$ alors $\delta \cap \delta_i$ est un point q_i qu'on déterminera.

3 Montrer que q est le barycentre de q_1 et q_2 affectés des masses $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$.

4 Montrer que si $z \in \mathbf{R}$ alors $(z,0)$ (respectivement $(0,z)$) est le barycentre de p_1 et p_0 (respectivement p_2 et p_0) affectés des masses z et $(1-z)$.

5 Soit $A \subset \mathbf{R}^2$ qui contient p_0, p_1, p_2 et tel que pour tous $a, b \in A$ et $t \in \mathbf{R}$ le barycentre de a et b affectés des masses t et $1-t$ est dans A. Déduire de ce qui précède que $A = \mathbf{R}^2$.

IV (5pts) On note $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $(3,3)$ réelles et on note $\mathscr{T} \subset \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ le sous-ensemble des matrices

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; t = (t_1, t_2) \in \mathbf{R}^2.$$

1 Montrer que $\mathscr{T}$ est un sous-espace affine de $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ et que l'application qui à $t \in \mathbf{R}^2$ associe $M_t \in \mathscr{T}$ est un isomorphisme affine.

2 Montrer que si $t, t' \in \mathbf{R}^2$ alors $M_t \times M_{t'} = M_{t+t'}$ et que $(\mathscr{T}, \times)$ est un groupe commutatif.

3 Montrer que l'ensemble G des transvections de $\mathbf{R}^3$ de base le plan $\{z = 0\}$ est stable par composition et forme un groupe commutatif.