Université de Rennes 1
Maîtrise de Mathématiques, MIM, Magistère
Edep - Examen - mai 2003

I.
On identifie $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{C}$ et si $z \in \mathbf{C}$ on pose $z = x + iy$, $dz = dx + idy$, et $d\overline{z} = dx - idy$.
On fixe dans la suite de l'exercice $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ et $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|z_0| < 1$.
On pose $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$ et $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$. On a donc $df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$.
On rappelle que d'après la formule de Stokes, si $\omega = adx + bdy$ est une 1-forme différentielle avec $a, b \in \mathcal{E}(\mathbf{C} \setminus \{z_0\})$ et si $R, r > 0$ avec $r + |z_0| < R$ alors

$$\int_{|z|=R} \omega - \int_{|z-z_0|=r} \omega = \int\int_{r<|z-z_0|,|z|<R} (\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y})dxdy$$

(si on parcourt dans le sens trigonométrique les deux cercles).
1. Montrer que $\frac{1}{z-z_0}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \in L^1_{loc}(\mathbf{C})$.
2. Montrer que $\frac{1}{2i\pi}\int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0}dz = 1$
3. Montrer que $\lim_{r\to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)$.
4. Montrer que

$$\int_{|z|=R} \omega - \int_{|z-z_0|=r} \omega = 2i\int\int_{r<|z-z_0|,|z|<R} \frac{1}{z-z_0}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}dxdy$$

si $\omega = \frac{f(z)}{z-z_0}dz$.
5. Montrer la formule de Cauchy-Pompeïu :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - \frac{1}{\pi}\int\int_{|z|<R} \frac{1}{z-z_0}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}dxdy.$$

6. En déduire que si $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ alors il existe $g \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ telle que $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = f$.

II.
Soit $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de complexes. Si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ on pose $T(\phi) = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k\phi(k)$.
1. Montrer que $\phi \in \mathcal{D}'$.
On suppose dans la suite que que pour tout $l \in \mathbf{N}$, $\sup_{k\in\mathbf{N}} \frac{|a_k|}{(1+k)^l} = +\infty$.
2. Montrer qu'il existe $(k_l)_{l\in\mathbf{N}} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ strictement croissante telle que $\frac{|a_{k_l}|}{(1+k_l)^l} > 1$.
Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ à support dans $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et telle que $\theta(0) = 1$. On pose $\phi_l(x) = \frac{1}{a_{k_l}}\theta(x - k_l)$
3. Montrer que la suite $(\phi_l)_{l\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.
4. En déduire que T n'est pas dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

III.
Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$.
1. Montrer que si $\lambda > 0$, $\phi \in \mathcal{D}(]-\lambda, \lambda[^d)$ et $x = (x', x_d) \in]-\lambda, \lambda[^d$ alors

$|\phi(x',x_d)|^2 \leq 2\lambda \int_{\mathbf{R}} |\frac{\partial\phi}{\partial x_d}(x',t)|^2 dt$.
2. Montrer que si Ω est borné il existe une constante C tel que si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est à valeurs réelles alors $\int_\Omega |\phi|^2 \leq C \int_\Omega |\frac{\partial\phi}{\partial x_d}|^2$.
3. Montrer que si $\Omega = \mathbf{R}^d$ il n'existe pas de telle constante C.

IV.
On rappelle que si $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ est une distribution à support compact alors sa transformée de Fourier $\widehat{T}$ est la fonction de $\omega \in \mathbf{R}^d$ définie par $\widehat{T}(\omega) =< T_x, e^{-ix\cdot\omega} >$. On note δ la masse de Dirac à l'origine et δ_a la masse de Dirac en $a \in \mathbf{R}^d$.
1. Montrer que $\widehat{\delta_a} = e^{-ia\cdot\omega}$ et $\widehat{\frac{\partial\delta}{\partial x_1}} = i\omega_1$, $\widehat{e^{ia\cdot x}} = (2\pi)^d\delta_a$ et $\widehat{x_1} = (2\pi)^d i\frac{\partial\delta}{\partial x_1}$.
2. Pour quels $s \in \mathbf{R}$ a-t-on $\delta \in H^s(\mathbf{R})$?
3. Montrer que l'application $T \mapsto -T'' + T$ est surjective de $H^t(\mathbf{R})$ dans $H^{t-2}(\mathbf{R})$ si $t \in \mathbf{R}$.
4. Montrer qu'il existe $T \in L^\infty(\mathbf{R})$ telle que :
$(*) \quad -T'' + T = \delta.$
5. Montrer qu'il existe une seule solution T_0 de $(*)$ dans $L^\infty(\mathbf{R})$.
6. Calculer la transformée de Fourier de $e^{-|x|}$ et en déduire T_0.

V.
1. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ telle que $\phi * \phi = 0$. Montrer que $\phi = 0$.
2. Rechercher une primitive de $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R})$ définie par $f(x) = e^x \cos(e^x)$.
3. Montrer que $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

VI.
Soit $p \in \mathbf{N}$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ telle que $\phi(x) = ||x||^p \varepsilon(x)$ avec $\lim_0 \varepsilon(x) = 0$ et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ telle que $\theta(x) = 1$ au voisinage de l'origine.
1. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que si $x \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}^d$ et $|k| \leq p$ alors
$|D^k\phi(x)| \leq K||x||^{p+1-|k|}$.
2. On pose $\phi_n(x) = \phi(x)\theta(nx)$. Montrer que si $k \in \{0, ..., p\}$ alors
$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} |\phi_n^{(k)}(x)| = 0$.
3. En déduire que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ est à support l'origine alors T est de la forme
$T(\phi) = \sum_{|k|\leq p} a_k \phi^{(k)}(0)$ où p et les a_k ne dépendent pas de $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$.
4. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ telle que $\Delta T = 0$. Montrer que le support de $\widehat{T}$ est inclus dans l'origine.
5. En déduire que T est un polynôme.