Université de Rennes I **Maîtrise de Mathématiques, MIM, Magistère**
Distributions et applications aux équations aux dérivées partielles (EDEP)
1er contrôle continu **12 février 2003**

Durée : 30mn - Les documents et calculatrices sont interdits.

Ecrire votre nom et répondre uniquement sur cette feuille aux questions suivantes.

Nom de l'étudiant(e) :

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$. On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact définies sur Ω et $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.

1. Caractériser une suite convergente dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (sans démonstration).
2. Définition d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
3. Caractérisation d'une distribution parmi les applications linéaires de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbf{C}$ (sans démonstration).
4. Qu'est ce que l'ordre d'une distribution?
5. Donner sans démonstration l'exemple d'une distribution d'ordre infini.
6. Qu'est ce qu'une partition C^∞ de l'unité subordonnée à un recouvrement d'ouverts?
7. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ fixée dans toute la suite. On suppose que si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{supp}(\phi) \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ alors $< T, \phi >= 0$. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{supp}(\theta) \in [-1, 1]$ et $\theta^{-1}(1) = [-1/2, 1/2]$.

7.a. Montrer que si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ alors $< T, \phi >=< T, \theta\phi >$ et $\mathrm{supp}(\theta\phi) \subset [-1, 1]$.

7.b. Pourquoi existe-t-il $C > 0$ et $m \in \mathbf{N}$ tel que $| < T, \psi > | \leq C||\psi||^{(m)}$ si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et $\mathrm{supp}(\psi) \in [-1, 1]$.

7.c. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{supp}(\psi) \in [-1, 1]$ et $\psi^{(k)}(0) = 0$ si $k \leq m$. Si $n \in \mathbf{N}$ on pose $\psi_n(x) = \theta(nx)\psi(x)$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} n^k \sup_{\mathbf{R}} |\theta^{(k)}(nx)\psi^{(m-k)}(x)| = 0$ si $k \leq m$ et en déduire que $\lim_{n\to\infty} ||\psi_n||^{(m)} = 0$.

7.d. Montrer qu'il existe $\lambda_0, ..., \lambda_m \in \mathbf{C}$ tel que $< T, \psi >= \sum_{k=0}^m \lambda_k \psi^{(k)}(0)$ si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et $\mathrm{supp}(\psi) \in [-1, 1]$.

7.e. Montrer que si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ alors $< T, \phi >= \sum_{k=0}^m \lambda_k \phi^{(k)}(0)$.

8. Montrer qu'il existe $L : \mathcal{D}(\mathbf{R}) \to \mathbf{C}$ linéaire qui n'est pas une distribution.