Université de Rennes I
Maîtrise de Mathématiques, MIM, Magistère 2ème année

Distributions et applications
aux équations aux dérivées partielles
(EDEP)

Partiel - Mars 2002

Les documents et calculatrices sont interdits.

I.
Soit $\theta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, paire, 2-périodique, définie sur $[0,1]$ par $\theta(x) = x$.
Si $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$ on pose

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{5^k} \theta(5^{2k} x),$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{5^k} \theta(5^{2k} x), \quad R_n(x) = T(x) - T_n(x).$$

1. Vérifiez que T est continue.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{Z}$. Montrez que T_n est affine sur l'intervalle $[\frac{p}{5^{2n}}, \frac{p+1}{5^{2n}}[$ et que si $t \in]\frac{p}{5^{2n}}, \frac{p+1}{5^{2n}}[$ alors $|T_n'(t)| \geq 3 \cdot 5^n$.
3. Soit $t, t' \in \mathbf{R}$. Montrez que $|R_n(t) - R_n(t')| \leq \frac{1}{5^n}$.
4. Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$.
a. Montrez qu'il existe $p \in \mathbf{Z}, x_n \in \mathbf{R}$ tels que $x, x_n \in [\frac{p}{5^{2n}}, \frac{p+1}{5^{2n}}[$ et $|x - x_n| = \frac{1}{2}\frac{1}{5^{2n}}$.
b. Montrez que $\frac{|T(x_n) - T(x)|}{|x_n - x|} \geq 5^n$.
c. Concluez que T n'est pas dérivable en x.
5. Calculez la dérivée seconde de T au sens des distributions.

II.
On identifie $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}^2$: $z = x + iy$ et $\mathcal{D}(\mathbf{C}) = \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ qui vaut 1 au voisinage de 0. On note θ l'élément de $\mathcal{D}(\mathbf{C})$ = défini par $\theta(z) = \rho(|z|^2)$.
1. Montrez que si $\varepsilon > 0$ les intégrales $\int_{|z|>\varepsilon} \frac{\theta(z)}{z^2} dxdy$, $\int_{|z|>\varepsilon} \frac{\theta(z)}{z} dxdy$, $\int_{|z|>\varepsilon} \frac{\theta(z)\bar{z}}{z^2} dxdy$ sont nulles (on peut passer en coordonnées polaires).
2. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{C})$. Vérifiez qu'il existe une constante $K > 0$ telle que si $z \in \mathbf{C}$ alors $|\int_0^1 (1-t) \mathrm{Hess}\phi(tz)(z,z) dt| \leq K|z|^2$ (où Hessϕ désigne la matrice des dérivées secondes de ϕ par rapport à x, y).
3. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{C})$. Prouvez que la limite de $\displaystyle\int_{|z|>\varepsilon} \frac{\theta(z)}{z^2} \left(\int_0^1 (1-t) \mathrm{Hess}\phi(tz)(z,z) dt \right) dxdy$ quand ε tend vers 0 existe et vaut

$$S(\phi) = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\theta(z)}{z^2} \left(\int_0^1 (1-t) \mathrm{Hess}\phi(tz)(z,z) dt \right) dxdy.$$

4. Justifiez que $R(\phi) = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{1-\theta(z)}{z^2} \phi(z) dxdy$ définit bien une distribution d'ordre 0.

5. Montrez qu'on définit une distribution V en posant

$$V(\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|z|>\varepsilon} \frac{\phi(z)}{z^2} dxdy$$

si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{C})$ et qu'on a $V(\phi) = S(\phi) + R(\phi)$ (pensez à une formule de Taylor).
6. Est-ce que V est d'ordre 0?

III.
On note $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$ la masse de Dirac. On rappelle que $E = -\frac{1}{4\pi||x||}$ est une solution fondamentale du Laplacien dans $\mathbf{R}^3$. On rappelle aussi la formule de Green pour les sphères de $\mathbf{R}^3$. Soit $r > 0$, B_r la boule euclidienne de $\mathbf{R}^3$ de rayon r et S_r la sphère correspondante. On note $\sigma_r \in \mathcal{E}^{0'}(\mathbf{R}^3)$ la mesure de surface sur S_r. Si $f, g \in \mathcal{E}^2(\Omega_r)$ (avec Ω_r ouvert contenant $\overline{B_r}$) alors

$$\int_{B_r} (f\Delta g - g\Delta f) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{S_r} (fdg - gdf).\overrightarrow{n} d\sigma_r$$

où $\overrightarrow{n}(x) = \frac{x}{||x||}$ si $x \neq 0$.
1. Soit $r > 0$.
a. Montrez

$$\int_{S_r} x_i d\sigma_r = \int_{S_r} x_i x_j d\sigma_r = 0 \quad \text{et} \quad \int_{S_r} x_i^2 d\sigma_r = \frac{4}{3}\pi r^4 \quad \text{si} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

(on peut utiliser des arguments de symétrie et l'égalité $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$).
b. Déduisez en que $\lim_{r \to 0^+} \frac{6}{r^2} \left(\int_{S_r} \frac{1}{4\pi r^2} \phi(x) d\sigma_r - \phi(0) \right) = \Delta\phi(0)$ si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^3)$ (pensez à une formule de Taylor)
2. Montrez que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$ alors $T * \sigma_r$ est bien défini et

$$\Delta T = \lim_{r \to 0^+} \frac{6}{r^2} (\frac{1}{4\pi r^2} T * \sigma_r - T).$$

3. Déduisez en que s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $r \in]0, \varepsilon[$ on a $\frac{1}{4\pi r^2} T * \sigma_r = T$ alors $\Delta T = 0$ et $T \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^3)$.
4. Si $r > 0$ on définit la distribution U_r suivante : $U_r(x) = \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi||x||}$ si $0 < ||x|| < r$ et $U_r(x) = 0$ sinon. Prouvez (à l'aide de la formule de Green par exemple) que

$$\Delta U_r = \delta - \frac{1}{4\pi r^2} \sigma_r.$$

5. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$. Justifiez l'existence de $U_r * \Delta T$ et exprimez $U_r * \Delta T$ en fonction de T et σ_r.
6. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$ une ditribution harmonique : $\Delta T = 0$. Dites pourquoi $T \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^3)$ et déduisez de 5. que si $x \in \mathbf{R}^3$ et si $r > 0$ alors

$$T(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} T(x + t) d\sigma_r.$$

7. Déduisez de 3. une réciproque à 6.