Université de Rennes I
Maîtrise de Mathématiques

**Distributions et applications aux équations aux dérivées partielles (EDEP)**

**Contrôle**

**Mars 2001**

Les notes de cours manuscrites sont autorisées.

On pourra utiliser l'égalité $\int_{\mathbf{R}} \exp(-t^2/2)dt = \sqrt{2\pi}$ dans les exercices II et III.

**I.**

Le but de cet exercice est de construire une fonction $C^\infty$, $f$, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telle que pour tout $a \in \mathbf{R}$ la série de Taylor $Tf_a(x) = \sum_{i\in\mathbf{N}} f^{(i)}(a)x^i/i!$ est divergente.

1) Soient $\varepsilon > 0, A > 0$ et $j \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ et $n \in \mathbf{N}$ tels que la fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = \lambda \sin(nx)$ vérifie les propriétés suivantes. Si $x \in \mathbf{R}$ alors
i - $|g^{(i)}(x)| \leq \varepsilon$ si $i = 0, ..., j$,
ii - $|g^{(j+1)}(x)| + |g^{(j+2)}(x)| \geq A$.

2) Soient $(\lambda_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de réels et $(n_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite d'entiers. Si $k \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ on pose

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \sin(n_i x).$$

Montrer qu'on peut choisir les suites $(\lambda_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(n_i)_{i\in\mathbf{N}}$ pour que si $x \in \mathbf{R}$ et si $k \geq 1$ alors
a) $|f_k^{(i)}(x) - f_{k-1}^{(i)}(x)| \leq 1/2^{k+1}$ si $i = 0, ..., 2k$,
b) $|f_k^{(2k+1)}(x)| + |f_k^{(2k+2)}(x)| \geq 2(2k+2)!(2k+2)^{(2k+2)} + 2$.

3) Montrer qu'alors la suite $f_k$ converge $C^\infty$ vers une fonction $C^\infty$ notée $f$.

4) Montrer que si $a \in \mathbf{R}$, le rayon de convergence de $Tf_a(x) = \sum_{i\in\mathbf{N}} f^{(i)}(a)x^i/i!$ est nul. On pourra remarquer (en justifiant) que si $k \in \mathbf{N}, j = 1, 2$ et $a \in \mathbf{R}$ alors

$$f^{(2k+j)}(a) = f_k^{(2k+j)}(a) + \sum_{i>k}(f_i^{(2k+j)}(a) - f_{i-1}^{(2k+j)}(a))$$

et chercher une minoration judicieuse de

$$\max\left(\left(\frac{f^{(2k+1)}(a)}{(2k+1)!}\right)^{1/(2k+1)}, \left(\frac{f^{(2k+2)}(a)}{(2k+2)!}\right)^{1/(2k+2)}\right).$$

**II.**

Le but de cet exercice est de montrer que toute distribution à support compact est la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ d'une suite de polynômes.

1) Soit $P \in \mathbf{R}[X_1, ..., X_n]$ un polynôme et soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ une distribution à support compact. Pourquoi peut-on convoler $T$ et $P$? Montrer que $T * P$ est un polynôme.

2) Montrer que la suite de fonctions $C^\infty$ définies par $f_k(x) = \exp(-k^2||x||^2)(k/\sqrt{\pi})^n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ vers la masse de Dirac $\delta$. On montrera en particulier que si $l \in \mathbf{N}$, il existe $k_l \in \mathbf{N}$ tel que si $k \geq k_l$ et si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ alors

$$([f_k] - \delta)(\phi) \leq (1/l) \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)|.$$

3) Fixons $k \in \mathbf{N}$. Montrer que la suite de polynômes $P_{k,j}(x) = (k/\sqrt{\pi})^n \sum_{i=0}^{j}(-k^2||x||^2)^i/i!$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ vers $f_k$. On montrera en particulier que si $l \in \mathbf{N}$, il existe $j_l \in \mathbf{N}$ tel que si $j \geq j_l$ et si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est à support dans la boule de rayon $l$ centrée à l'origine alors

$$[P_{k,j} - f_k](\phi) \leq (1/l) \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |\phi(x)|.$$

4) En déduire (par un argument d'extraction diagonale par exemple) que la masse de Dirac $\delta$ est limite dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ d'une suite de polynômes.
5) Montrer que toute distribution à support compact $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ est la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ d'une suite de polynômes.

**III.**

Soit $\mathcal{C} = \dfrac{\partial}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta$ l'opérateur de la chaleur. Le but de cet exercice est de montrer que la fonction

$$\Gamma(t,x) = \frac{\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t) \exp(-||x||^2/4t)}{(4\pi t)^{n/2}}$$

est localement intégrable et que la distribution $[\Gamma]$ associée est une solution fondamentale de $\mathcal{C}$.
1) Montrer que si $t > 0$ alors $\Gamma(t,\cdot) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est dans $L^1(\mathbf{R}^n)$ et l'intégrale $\int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(t,x)dx$ est indépendante de $t > 0$. En déduire que $\Gamma$ est dans $L^1_{loc}(\mathbf{R}^{n+1})$ et qu'elle définit une distribution $[\Gamma]$.
Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{n+1})$ une fonction $C^\infty$ à support compact.
2) Montrer que

$$\frac{\partial}{\partial t}[\Gamma](\phi) = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x)\Gamma(t,x)dxdt.$$

3) Montrer que

$$\frac{\partial}{\partial t}[\Gamma](\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left( \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \phi(t,x)\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t,x)dxdt + \int_{\mathbf{R}^n} \phi(\varepsilon,x)\Gamma(\varepsilon,x)dx \right).$$

4) Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbf{R}^n} \phi(\varepsilon,x)\Gamma(\varepsilon,x)dx = \phi(0).$$

On pourra faire le changement de variables $x = u\sqrt{\varepsilon}$.
5) Vérifier que $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial t} = \Delta\Gamma$ (au sens des fonctions) sur $]0,+\infty[\times\mathbf{R}^n$.
6) En déduire que si $\varepsilon > 0$ alors

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \phi(t,x)\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t,x)dxdt = \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \Delta\phi(t,x)\Gamma(t,x)dxdt.$$

7) Montrer que $\mathcal{C}[\Gamma] = \delta$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.