Université de Rennes I
Maîtrise de Mathématiques, MIM, Magistère 2ème année

**Distributions et applications
aux équations aux dérivées partielles
(EDEP)**

Examen - Mai 2002

Les documents et calculatrices sont interdits.

I.
Soit $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ et $s \in \mathbf{R}$. Montrez que l'opérateur $-\Delta + \lambda^2$ est un opérateur
a. continu,
b. injectif,
c. surjectif
de $H^{s+2}(\mathbf{R}^d)$ dans $H^s(\mathbf{R}^d)$.

II.
Montrez que la fonction $\exp(x)\cos(\exp(x))$ définit une distribution tempérée.

III.
1. Préliminaire
a. Montrez qu'il existe $f \in \mathcal{E}(]-\pi,\pi[)$ telle que $f(x) = 1/sin(x) - 1/x$ si $x \neq 0$.
b. Soit $a < 0 < b$ et soit $g, h \in \mathcal{E}(]a,b[)$ telles que $g(0) = h(0) = 0$, $h'(0) \neq 0$ et h sans autre zéro. Montrez qu'il existe un élément de $\mathcal{E}(]a,b[)$ qui coïncide avec $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ si $x \neq 0$.
c. Montrez que si g est une fonction C^1 sur $[c,d]$ alors $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \displaystyle\int_c^d g(x)\sin(\lambda x)dx = 0$.
d. Montrez que $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \exp(ikx) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$ si $x \in]0,\pi[$ et

$$2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}dx = \pi.$$

e. Prouvez que $\displaystyle\int_0 +\infty \frac{\sin x}{x}dx = \pi/2$ (on peut utiliser a., c. et d.)

2. a. Montrez qu'on définit bien une distribution tempérée notée $\mathrm{vp}(\dfrac{1}{x})$ en associant à $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ la limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \displaystyle\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}dx$.
b. Montrez que si $\phi \in \mathcal{S}$ alors

$$< \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \widehat{\phi} >= i\pi \int_0^{+\infty} (\phi(t) - \phi(-t))dt.$$

c. Déterminez l'antécédent par la transformation de Fourier de la fonction de Heaviside $H(\omega) = \mathbf{1}_{]0,+\infty[}$.

3. a. Soit $\alpha > 0$ Montrez qu'il existe une distribution tempérée T_α qui à $\phi \in \mathcal{S}$ associe

$$< T_\alpha, \phi >= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \phi(k\alpha).$$

b. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbf{N}$ tel que $\mathrm{supp}\widehat{\phi} \subset]-M\pi, M\pi[$. Montrez que si $n \in \mathbf{N}$ alors

$$\sum_{k=-n}^{n} \phi(k) = \sum_{l=-M}^{M} \int_{-1/2}^{1/2} \widehat{\phi}(2\pi(\omega + l)) \frac{\sin(2\pi\omega(n+1/2)}{\sin(\pi\omega)}d\omega.$$

c. Montrez que si $l \in \mathbf{Z}$ alors $\lim_{n\to+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \widehat{\phi}(2\pi(\omega+l)) \frac{\sin(2\pi\omega(n+1/2))}{\sin(\pi\omega)} d\omega = \widehat{\phi}(2\pi l)$.

d. Montrez que si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ quelconque on a $< \widehat{T_1}, \phi >= 2\pi \sum_{k\in\mathbf{Z}} \phi(2\pi k)$ et déduisez-en que $\widehat{T_\alpha} = \frac{2\pi}{\alpha} T_{2\pi/\alpha}$.

4. a. Pourquoi peut-on convoler $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ et ϕ si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$? Calculez la transormée de Fourier de $\frac{1}{i\pi}\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) * \phi$.

b. Déduisez-en que $\frac{1}{i\pi}\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) * \phi$ est dans $L^2(\mathbf{R})$ et que $||\phi||_{L^2(\mathbf{R})} \geq ||\frac{1}{i\pi}\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) * \phi||_{|L^2(\mathbf{R})}$.

c. Prouvez qu'il existe un unique opérateur linéaire continu A de $L^2(\mathbf{R})$ dans lui même tel que si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ alors $A(\phi) = \frac{1}{i\pi}\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) * \phi$.

IIII. On rappelle que l'opérateur de Cauchy-Riemann est défini par $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et qu'il admet comme solution fondamentale la distribution $\frac{1}{\pi z}$. Si $r > 0$ on pose $D_r = \{z \in \mathbf{C}, |z| < r\}$. L'objet de l'exercice et de montrer que l'opérateur de Cauchy-Riemann est un opérateur surjectif de $\mathcal{D}'(D_1)$ dans lui-même.

1. a. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et $T \in \mathcal{D}'(U)$ telle que $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(T) = 0$. Montrez que T est une fonction C^∞ et holomorphe.

b. Soit $h_n : U \to \mathbf{C}$ une suite de fonctions holomorphes qui convergent uniformément. Déduisez de 1.a. que la limite est une fonction holomorphe.

c. Soit $0 < r' < r$ et soit $\varepsilon > 0$. Montrez que si $h : D_r \to \mathbf{C}$ est une fonction holomorphe alors il existe un polynôme complexe $Q \in \mathbf{C}[z]$ tel que pour tout $z \in D_{r'}$ on a $|h(z) - Q(z)| < \varepsilon$.

2. a. Montrez que l'opérateur de Cauchy-Riemann est un opérateur surjectif de $\mathcal{E}'(D_r)$ dans lui-même.

b. Soit $0 < r_n < s_n < t_n < r_{n+1} < 1$, trois suites croissantes qui tendent vers 1, soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbf{C})$, positive, à support dans D_1 et de masse égale à 1 et soit ε_n une suite de réels strictement positifs. Pourquoi $\eta_n = \frac{1}{\varepsilon_n^2}\rho(x/\varepsilon_n) * \mathbf{1}_{D_{t_n}}$ est un élément de $\mathcal{D}(\mathbf{C})$ à valeurs dans $[0,1]$? Comment choisir ε_n pour que η_n soit à support dans $D_{r_{n+1}}$ et soit constante égale à 1 sur D_{s_n}?

c. On choisit ε_n comme indiqué dans 2.b. et on fixe $T \in \mathcal{D}'(D_1)$. On pose $T_n = \eta_n T$.

d. Montrez qu'il existe $S_n \in \mathcal{D}'(D_1)$ telle que $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(S_n) = T_n$.

e. Montrez que la restriction de $S_{n+1} - S_n$ à D_{s_n} est une fonction holomorphe g_n et qu'il existe un polynôme P_n tel que si $z \in D_{r_n}$ alors $|g_n(z) - P_n(z)| < 2^{-n}$.

f. Montrez qu'on définit une distribution $S \in \mathcal{D}'(D_1)$ en posant pour tout $\phi \in \mathcal{D}(D_1)$

$$< S, \phi >=< S_0, \phi > + \sum_{n=0}^{+\infty} < S_{n+1} - S_n - P_n, \phi > .$$

g. Vérifiez que $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(S) = T$.