Université de Rennes I
Maîtrise de Mathématiques

Distributions et applications
aux équations aux dérivées partielles
(EDEP)
Examen - Mai 2001 - (après relecture)

Les notes de cours manuscrites sont autorisées.
On pourra utiliser l'égalité $\int_{\mathbf{R}} \exp(-2\pi t^2)dt = 1/\sqrt{2}$.
L'espace des fonctions de $\mathbf{R}^n$ à décroissance rapide est noté $\mathcal{S}_n$, celui des distributions tempérées de $\mathbf{R}^n$ est noté $\mathcal{S}'_n$.

I. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ une distribution à support compact et d'ordre k. Sa transformée de Fourier $\widehat{T}(x)$ qui est égale à $< T, \exp(-itx) >$ est une fonction C^∞. Le but de cet exercice est de faire des estimations sur la fonction $\widehat{T}$ et d'en déduire que T appartient à certains espaces de Sobolev.
1) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $|\widehat{T}(x)| \leq C(1 + ... + |x|^k)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
2) En déduire qu'il existe $D > 0$ tel que $(1 + |x|^2)^s|\widehat{T}(x)|^2 \leq D(1 + |x|^2)^{s+k}$ pour tout x et tout s.
3) Conclure que T est dans l'espace de Sobolev H^s pour $s < -1/2 - k$.

II. On rappelle que le produit de convolution d'une fonction de classe C^k définie sur $\mathbf{R}^n$ et d'une distribution à support compact d'ordre au plus k est une fonction continue.
1) Si $k \in \mathbf{N}$ on note Γ_k l'opérateur

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k+2} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k+2}.$$

Soit H la fonction de Heaviside. Montrer que la fonction

$$\phi(x) = \frac{x_1^{k+1}H(x_1)...x_n^{k+1}H(x_n)}{((k+1)!)^n}$$

est une solution fondamentale de classe C^k de l'opérateur Γ_k.
2) Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ une distribution à support compact. Montrer qu'il existe une fonction continue f définie sur $\mathbf{R}^n$ et un entier k tels que $T = \Gamma_k(f)$.

III.
1) Soient $f, \theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et $k \in \mathbf{N}$. On suppose que si $i = 0, ..., k$ alors $f^{(i)}(0) = 0$. On suppose aussi que θ vaut 1 au voisinage de l'origine. Montrer que si $i = 0, ..., k$ alors la suite de fonctions $x \mapsto \dfrac{d^i}{dx^i}(f^{(i)}(x)\theta(nx))$ tend uniformément sur $\mathbf{R}$ vers la fonction nulle.
2) Donner en justifiant une caractérisation des distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ dont le support est l'origine. On pourra utiliser la première question pour montrer que si T est d'ordre k et si f est comme dans 1) alors $< T, f >= 0$.
3) Caractériser les distributions tempérées dont les transformées de Fourier sont des polynômes.
4) Soit $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une fonction entière. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k(\varepsilon) \in \mathbf{N}, \gamma(\varepsilon) > 0$ tels que

$$|g(z)| \leq \gamma(\varepsilon)(1 + |z|)^{k(\varepsilon)} \exp(\varepsilon|\mathrm{Imz}|).$$

Montrer que la restriction $g_{\mathbf{R}}$ de g à $\mathbf{R}$ est une distribution tempérée.
5) Montrer à l'aide d'un des théorèmes de Paley-Wiener que la transformée de Fourier de $g_{\mathbf{R}}$ est une distribution à support réduit à l'origine et conclure sur la nature de g.

IV.
1) Soit D un opérateur elliptique défini sur sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ et soit $T \in \mathcal{D}'(U)$ une distribution vérifiant $DT = 0$. Que sait-on de la régularité de T? En déduire que toute solution fondamentale du Laplacien dans $\mathbf{R}^n$ est une fonction localement intégrable qui est C^∞ hors de l'origine.
Soient E une telle solution fondamentale, $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ qui vaut 1 au voisinage de l'origine et $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ une distribution telle que ΔT soit continue.

2) Dire pourquoi $(\theta E) * \Delta T$ est bien défini et montrer que $T - (\theta E) * \Delta T$ est une fonction C^∞.
3) Montrer que T est une fonction continue.

V. Problème Le but est de construire une série dans $\mathcal{S}_1$ qui converge dans $\mathcal{S}_1'$ vers la masse de Dirac δ.
1) Si $n \in \mathbf{N}$ on note H_n le polynôme défini par

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (\exp(-2\pi x^2)) = (-1)^n \sqrt{n!}\ 2^{n-1/4} \pi^{n/2} H_n(x) \exp(-2\pi x^2).$$

Montrer que si $n \geq 1$ alors

$$2\sqrt{\pi(n+1)} H_{n+1}(x) - 4\pi x H_n(x) + \frac{d}{dx}(H_n(x)) = 0$$

et

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} (\exp(-2\pi x^2)) + 4\pi x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (\exp(-2\pi x^2)) + 4\pi n \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (\exp(-2\pi x^2)) = 0.$$

2) Montrer en utilisant 1) que si $n \geq 1$ alors

$$2\sqrt{\pi(n+1)} H_{n+1}(x) - 4\pi x H_n(x) + 2\sqrt{\pi n} H_{n-1}(x) = 0.$$

Montrer ensuite que

$$\frac{d}{dx}(H_n(x)) = 2\sqrt{\pi n} H_{n-1}(x).$$

Quel est le degré de H_n?
3) Calculer $H_n(0)$. Montrer en particulier que

$$H_{2n}(0) = 2^{1/4} \frac{(-1)^n \sqrt{(2n)!}}{2^n n!}$$

et montrer que la suite $H_n(0)$ est bornée.
4) On pose $L_n = \exp(-\pi x^2) H_n(x)$. Montrer que L_n appartient à l'espace $\mathcal{S}_1$.
5) Montrer que $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une famille orthonormale de $L^2(\mathbf{R})$ (il peut être utile d'intégrer par partie $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+k} (\exp(-2\pi x^2)) H_n(x)$, de considérer le degré de H_n, d'utiliser la seconde égalité de 2) et la valeur de l'intégrale donnée en début de sujet).
6) On note P et Q les deux opérateurs définis sur $\mathcal{S}_1'$ par : $P(T) = T' + 2\pi x T$ et $Q(T) = -T' + 2\pi x T$ si $T \in \mathcal{S}_1'$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer les égalités

$$P(L_{n+1}) = 2\sqrt{\pi(n+1)} L_n,$$
$$Q(L_n) = 2\sqrt{\pi(n+1)} L_{n+1}.$$

7) Soit $f \in \mathcal{S}_1 \subset L^2(\mathbf{R})$. Utiliser 5) pour montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |< L_n, f >|^2 \leq ||f||^2_{L^2(\mathbf{R})}$.
8) Indiquer pourquoi $P(f) \in \mathcal{S}_1$, utiliser 6) pour montrer l'égalité

$$< L_n, P(f) > = < Q(L_n), f > = 2\sqrt{\pi(n+1)} < L_{n+1}, f >$$

et en déduire

$$\sum_0^{+\infty} 4\pi(n+1) |< L_{n+1}, f >|^2 < +\infty.$$

9) En itérant la méthode de la question 8) montrer que pour $k \in \mathbf{N}$ et pour tout $f \in \mathcal{S}_1$ il existe $C > 0$ qui majore la suite $n^k |< L_n, f >|, n \in \mathbf{N}$.
10) Si $N \in \mathbf{N}$ on pose $S_N = \sum_0^N H_{2n}(0) L_{2n}$. Montrer en utilisant 3) et 9) que si $f \in \mathcal{S}_1$ alors la suite $< S_N, f >$ converge vers un nombre noté $< S, f >$.
11) On définit ainsi une distribution tempérée S. Montrer que si $f \in \mathcal{S}_1$ alors la suite $< 4\pi x S_N, f >$ qui est égale à $< P(S_N) + Q(S_N), f >$ tend d'une part vers $< 4\pi x S, f >$ et d'autre part vers 0.
12) Ainsi la distribution tempérée $4\pi x S$ est nulle et donc la distribution S qui est à support réduit à l'origine est de la forme $S = \sum_{i=0}^k \lambda_i \delta^{(i)}$. Montrer que $k = 0$, calculer $< S, L_0 >$ et en déduire que $S = \delta$.