Université de Rennes 1 **Maîtrise de Mathématiques, MIM, Magistère**
Distributions et applications aux équations aux dérivées partielles (EDEP)
3ème contrôle continu **2 avril 2003**

Durée : 30mn - Les documents et calculatrices sont interdits
Ecrire votre nom et répondre uniquement sur cette feuille aux questions suivantes.

Nom de l'étudiant(e) :

1. Soit $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^2), \theta \in \mathcal{E}(\mathbf{R})$ réelle et $U = \{(x,y), y > \theta(x)\}$. On note $s \mapsto \gamma(s)$ le graphe de θ paramétré par l'abscisse curviligne et on note $\frac{d\gamma}{ds}(s) = (\gamma'_x(s), \gamma'_y(x))$. Enfin on pose $T = [f\mathbf{1}_U] \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$.

1.a. Montrer que $\int_{\mathbf{R}} \phi(x,\theta(x)) f(x,\theta(x)) dx = \int_{\mathbf{R}} \phi(\gamma(s)) f(\gamma(s)) \gamma'_x(s) ds$ si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$.

1.b. Montrer que $< D_y T, \phi >= \int_U \frac{\partial f}{\partial y} \phi dx dy - \int_{\mathbf{R}} \phi(\gamma(s)) f(\gamma(s)) \gamma'_x(s) ds$ si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$.

2. Trouver $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2) \setminus \mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ telle que $\frac{\partial}{\partial x \partial y} T = 0$.

3.a. Montrer que $T_n = [\sin(nx)]$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ vers 0.

3.b. Soit $\phi \in \mathcal{E}(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $\psi \in \mathcal{E}(\mathbf{R})$ tel que $\psi(x) = \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}$ si $x \neq 0$.

3.c. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer qu'on définit une distribution U_n d'ordre 0 en posant

$$< U_n, \phi >= \frac{1}{\pi} \lim_{R \to 0} \int_{R<|x|<1/R} \frac{\sin(nx)}{x} \phi(x) dx \quad \text{si} \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}).$$

3.d. Montrer que U_n converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ vers la masse de Dirac en 0 (rappel : $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{1/\lambda}^{\lambda} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$).

4. Soit $f = \log|\log(||x||)| \mathbf{1}_{\{||x||<1/2\}}$. Montrer que $[f] \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ et $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in L^1(\mathbf{R}^2)$ ($f \in W^{1,1}(\mathbf{R}^2)$).

5. Soit $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R})$ telle que $f^{(k)}(0) = 0$ si $k \in \mathbf{N}$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} x^n f(\frac{1}{x}) = 0$ si $n \in \mathbf{N}$.