Université de Rennes I **Maîtrise de Mathématiques, MIM, Magistère**
Distributions et applications aux équations aux dérivées partielles (EDEP)
2ème contrôle continu **14 mars 2003**

Durée : 30mn - Les documents et calculatrices sont interdits.

Ecrire votre nom et répondre uniquement sur cette feuille aux questions suivantes.

Nom de l'étudiant(e) :

Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^d$ on note $\mathcal{E}(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ définies sur Ω, $\mathcal{D}(\Omega)$ le sous-espace de celles qui sont à support compact, $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω et $\mathcal{E}'(\Omega)$ le sous-espace dual de $\mathcal{E}(\Omega)$. On note δ la masse de Dirac à l'origine de $\mathbf{R}^d$.

1. Donner une condition suffisante sur $T, S \in (\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d) \setminus \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d))$ pour que $T * S$ soit défini.

2. Soit $\Omega_1, ..., \Omega_n$ des ouverts de $\mathbf{R}^d$ de réunion Ω et soit $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{C}$. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si et seulement si pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, la restriction de T à $\mathcal{D}(\Omega_k)$ est dans $\mathcal{D}'(\Omega_k)$.

3.a. Montrer que T définie par $< T, \phi >= \int_{\mathbf{R}} \phi(x, x)dx$ si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ est une distribution.
3.b. Quel est l'ordre et le support de T?
3.c. Calculer $\dfrac{\partial T}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T}{\partial x_2}$.

4. Trouver deux suites $T_n, S_n \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telles que T_n et S_n convergent vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ alors que $T_n * S_n = \delta$.

5. Montrer que si $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ et si P est un polynôme alors $T * P$ est un polyôme.

6. Calculer (après avoir vérifier que c'est licite) $([1] * D\delta) * H$ et $[1] * (D\delta * H)$ où $H = 1_{]0,+\infty[}$.

7. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ définie par $T = 1_{\{0<y<x\}}$. Démontrer que $(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y})T = \delta$.

8. Démontrer que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ et si S_n tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{d'})$ alors $T \otimes S_n$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{d+d'})$.