Université de Rennes — L3 Mathématiques

UFR Mathématiques — Courbes et surfaces paramétrées

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 Donner l'équation cartésienne d'un cylindre de révolution, d'axe Oz et contenant le point $(1, 0, 0)$ et montrer que c'est une surface régulière qu'on dessinera.

Exercice 2 Soit S l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

avec $a, b, c \neq 0$. Montrer que S est une surface régulière de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 3 On considère le paraboloïde de révolution S de $\mathbf{R}^3$ défini par

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 - z = 0\}.$$

1. Montrer que S est une surface régulière de $\mathbf{R}^3$.

2. Donner des isométries de $\mathbf{R}^3$ qui laissent S globalement invariante.

3. Dessiner S.

Exercice 4 On considère le paraboloïde hyperbolique S de $\mathbf{R}^3$ (appelé aussi selle de cheval) défini par

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 - y^2 - z = 0\}.$$

1. Montrer que S est une surface régulière de $\mathbf{R}^3$.

2. Donner des isométries de $\mathbf{R}^3$ qui laissent S globalement invariante.

3. Dessiner S.

Exercice 5 On considère le cône de révolution S de $\mathbf{R}^3$ défini par

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = 0\}.$$

1. Montrer que $S \setminus \{O\}$ est une surface régulière de $\mathbf{R}^3$.

2. Donner des isométries de $\mathbf{R}^3$ qui laissent S globalement invariante.

3. Montrer que si $M \in S \setminus \{0\}$ alors la droite qui passe par O et M est incluse dans S.

4. Dessiner S.

Exercice 6 On considère l'hyperboloïde à une nappe S de $\mathbf{R}^3$ obtenu en faisant tourner la droite d qui contient les points $(1, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$ autour de l'axe vertical.

1. Montrer que S est donné par l'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

2. Montrer que S est une surface régulière de $\mathbf{R}^3$.

3. Dessiner S.

Exercice 7 On considère l'hyperboloïde à deux nappes S de $\mathbf{R}^3$ d'équation

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1.$$

1. Montrer que S est globalement invariante sous l'action des rotations d'axe vertical.

2. Montrer que S est une surface régulière de $\mathbf{R}^3$.

3. Montrer que S est la réunion des graphes de deux applications C^∞ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^*$ et opposées l'une de l'autre.

4. Montrer que S possède deux composantes connexes.

5. Dessiner S.

Exercice 8 On considère le tore de révolution S engendré par la rotation autour de l'axe Oz du cercle

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | (x-2)^2 + z^2 = 1, y = 0\}.$$

1. Montrer que S est une surface régulière de $\mathbf{R}^3$.

2. Montrer que S vérifie l'équation cartésienne

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2).$$

3. Montrer que S est l'image de $\mathbf{R}^2$ par l'application ϕ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par

$$\phi(t, s) = (\cos(t)(2 + \cos(s)), \sin(t)(2 + \cos(s)), \sin(s)).$$

4. Vérifier que ϕ est de rang constant égale à 2.

5. Dessiner S.

Exercice 9 Soit $R > 0$ et S_R la sphère formée des points M de $\mathbf{R}^3$ tels que $||\overrightarrow{OM}|| = R$.

1. Montrer que S_R est une surface régulière de $\mathbf{R}^3$.

2. Calculer la courbure de Gauss de S_R.

Exercice 10 On considère la pseudosphère S qui est engendrée par la rotation autour de l'axe Oz de la tractrice

$$t \in \mathbf{R}^{+*} \mapsto \gamma(t) = (t - \tanh(t), 0, \frac{1}{\cosh(t)}).$$

1. Montrer que S est une surface régulière de $\mathbf{R}^3$.

2. Calculer la courbure de Gauss de S.

Exercice 11 Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit S_n le sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$ image de $\mathbf{R} \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ par ϕ_n

définie par

$$\phi_n(t,s) = (\cos(2t)(1+s\cos(nt)), \sin(2t)(1+s\cos(nt)), s\sin(nt)).$$

1. Montrer que S_n est une surface régulière de $\mathbf{R}^3$.

2. Dessiner S_n lorsque $n = 0$ ou 1.

Exercice 12 On considère le parapluie de Whitney S image de $\mathbf{R}^2$ par

$$\phi_n(t,s) = (t, st, s^2) \text{ si } t, s \in \mathbf{R}.$$

1. Montrer qu'en chaque points de S passe une droite incluse dans S.

2. Montrer que $S \setminus \{Oz\}$ est une surface régulière de $\mathbf{R}^3$.

3. Montrer que $S \subset \tilde{S}$ où $\tilde{S}$ est défini par l'équation

$$y^2 = zx^2.$$

4. Dessiner S et $\tilde{S}$.

Exercice 13 Montrer l'existence d'un point non hyperbolique sur toute surface régulière et compacte.

Exercice 14 Soit S la surface régulière qui est le graphe de l'application f définie par

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{O\}.$$

1. Reconnaître un cône de révolution privé de son sommet.

2. Déterminer l'ensemble N des vecteurs unitaires normaux à S.

3. Montrer que N est inclus dans la réunion de deux cercles.

4. En déduire la courbure de Gauss de S en chaque point.