Exercice 1 Soit $a > 0$, $\mathcal{C}$ un cercle de rayon $2a$, de centre O et bordant un disque fermé D et Γ un cercle de rayon a inclus dans D et roulant sans glisser dans le sens anti-horaire le long du cercle $\mathcal{C}$: la trajectoire du centre Ω du cercle Γ est la courbe paramétrée

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma_\Omega(t) = (a\cos(t), a\sin(t))$$

et Γ tourne sur lui-même dans le sens horaire à la même vitesse que Ω autour de O. Si $T \in \mathbf{R}$ donner la courbe paramétrée, appelée droite d'Al-Tusi, qui correspond à la trajectoire du point M_T de Γ qui se trouve sur $\mathcal{C}$ en $t = T$ et dessiner la situation.

Exercice 2 Une courbe de Lissajous est une courbe paramétrée

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = (a\sin(t+\phi), b\sin(\omega t + \psi))$$

avec $a > 0$, $b > 0$, $0 \leq \phi, \psi \leq \frac{\pi}{2}$ et $\omega \geq 1$.

1. Étudier et tracer l'arc associé lorsque $\omega = 1, 2, n, \frac{p}{q}$ avec $n, p, q \in \mathbf{N}^*$ et $pgcd(p, q) = 1$.

2. Trouver a, b, ϕ, ψ, ω pour que l'arc associé soit un segment, un morceau de parabole, le graphe de la restriction d'un polynôme de degré 3 à un segment, une ellipse, un cercle.

3. Que se passe-t-il si ω est irrationnel ?

Exercice 3 Soit $p, q \in \mathbf{N}^*$ premiers entre eux. Dessiner, suivant les valeurs de p et q l'arc $\gamma(\mathbf{R})$ associée à la courbe paramétrée

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = (t^p, t^q)$$

et trouver un polynôme $P(X, Y) \in \mathbf{R}[X, Y]$ tel que $\gamma(\mathbf{R}) = P^{-1}(0)$.

Exercice 4 Soit $a > 0$, $\mathcal{C}$ un cercle de rayon a, de centre O et bordant un disque ouvert D et Γ un cercle de rayon a, extérieur à D et roulant sans glisser dans le sens anti-horaire le long du cercle $\mathcal{C}$: la trajectoire du centre Ω du cercle Γ est la courbe paramétrée

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma_\Omega(t) = (2a\cos(t), 2a\sin(t))$$

et Γ tourne sur lui-même dans le sens anti-horaire à la même vitesse que Ω autour de O. Si $T \in \mathbf{R}$ donner la courbe paramétrée, appelée cardioïde, qui correspond à la trajectoire du point M_T de Γ qui se trouve sur $\mathcal{C}$ en T et dessiner la situation.

Exercice 5 Soit $a > 0$, $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega = (a, 0)$ et de rayon a et d la droite d'équation $x = 2a$.

1. Montrer, qu'à l'exception de l'axe Oy, toute droite qui passe par O coupe chacun des deux ensemble d et $\mathcal{C} \setminus \{O\}$ en un unique point.

2. On considère Γ formé des points M du plan tels que $M = O$ ou, les deux points $M_1 \in \mathcal{C}$ et $M_2 \in d$ alignés avec O et M vérifient $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM}$. La courbe Γ ainsi obtenue est appelée *cissoïde de Dioclès*.

2.a. Vérifier que Γ est l'arc associé à

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = (2a\frac{t^2}{1+t^2}, 2a\frac{t^3}{1+t^2}).$$

2.b. Vérifier que Γ est donné par l'équation cartésienne

$$(2a - x)y^2 = x^3.$$

Exercice 6 Soit $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On considère la droite d d'équation $x = \cos(\theta_0)$ et la conchoïde de Nicomède dont la représentation polaire est donnée par

$$\rho = \frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta)} + 1.$$

1. Quelle est la représentation polaire de la droite d ?

2. Pour quels θ il existe un point M de la conchoïde qui est différent de O ?

3. On considère un tel θ et le point M associé. Montrer que la droite définie par O et M coupe la droite d en un point P tel que $||\overrightarrow{MP}|| = 1$.

4. Tracer la conchoïde.

Exercice 7 On considère la lemniscate de Bernoulli associée à $F = (-1, 0)$ et $F' = (1, 0)$. C'est l'ensemble des points M du plan tels que

$$||\overrightarrow{FM}|| \cdot ||\overrightarrow{F'M}|| = 1.$$

1. Montrer que cette lemniscate admet la représentation polaire

$$\rho^2 = 2\cos(2\theta).$$

2. Montrer que c'est le lieu des points $M(x, y)$ vérifiant

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2).$$

Exercice 8 Soit Γ la parabole d'équation $y = ax^2$ où $a > 0$.

1. Montrer qu'il existe un point F du plan tel que si $M \in \Gamma$ la tangente à Γ en M est la bissectrice de la droite qui passe par M et F et de la droite verticale qui passe par M.

2. Montrer qu'il existe une droite d parallèle à l'axe des abscisses telle que si $M \in \Gamma$ la distance de M à F est égale à la distance de M à d.

Exercice 9 Calculer la courbure de la parabole d'équation $y = ax^2$.

Exercice 10 Calculer la courbure de la courbe paramétrée

$$t \in]-1, 1[\mapsto \gamma(t) = (\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}).$$

Exercice 11 Montrer qu'une courbe plane paramétrée par l'abscisse curviligne donne un arc rectiligne si et seulement sa courbure est nulle.

Exercice 12 Montrer qu'une courbe plane paramétrée par l'abscisse curviligne donne un arc sur un cercle de rayon $R > 0$ si et seulement sa courbure est constante égale à $1/R$.

Exercice 13 Soit $a > 0$ et $b > 0$. Calculer la courbure et la torsion pour l'hélice

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt).$$

Exercice 14 On considère $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, une courbe birégulière et de classe C^3 qui sort de tout plan affine : si $\mathcal{P}$ est un plan affine alors $\gamma(\mathbf{R}) \not\subset \mathcal{P}$. Montrer que la torsion de γ n'est pas identiquement nulle.

Exercice 15 On considère la loxodromie

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = (\frac{1}{\cosh(mt)}\cos(t), \frac{1}{\cosh(mt)}\sin(t), \tanh(mt)).$$

1. Montrer que cette courbe paramétrée est régulière, de classe C^∞ et vérifie $\gamma(\mathbf{R})$ est contenue dans la sphère unité.

2. Donner, si $t \in \mathbf{R}$, le vecteur $\gamma'(t)$.