Université de Rennes | L3 Mathématiques

UFR Mathématiques | Courbes et surfaces paramétrées

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 Montrer que $||\overrightarrow{MT}|| = a$ si $a > 0$, M est un point de la tractrice (que l'on tracera)

$$t \in \mathbf{R}^{+*} \mapsto \gamma(t) = (at - a\tanh(t), \frac{a}{\cosh(t)})$$

et T le point d'intersection de l'axe Ox et de la tangente en M à l'arc $\gamma(\mathbf{R}^{+*})$.

Exercice 2 Soit $a, b > 0$. Donner une paramétrisation de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et dessiner l'arc correspondant.

Exercice 3 Donner une équation cartésienne de la courbe paramétrée

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = (\exp(t), t^2)$$

et dessiner l'arc correspondant.

Exercice 4 On considère la spirale logarithmique

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = (\exp(t)\cos(t), \exp(t)\sin(t)).$$

1. Calculer la longueur de l'arc $\gamma([0, 2\pi])$ et dessiner cet arc.

2. Donner une paramétrisation par l'abscisse curviligne de la spirale logarithmique.

Exercice 5 Montrer que la courbe paramétrée

$$t \in]0,1[\mapsto \gamma(t) = (\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}})$$

est paramétrée de façon unitaire ($||\gamma'(t)|| = 1$).

Exercice 6 Dire dans chacun des cas si γ est ou non une courbe régulière :

1. $\gamma(t) = (\cos^2(t), \sin^2(t))$, $-\infty < t < +\infty$;

2. $\gamma(t) = (\cos^2(t), \sin^2(t))$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$;

3. $\gamma(t) = (t, \cosh(t))$, $-\infty < t < +\infty$.

Exercice 7 Donner une paramétrisation non régulière de la parabole $y = x^2$.

Exercice 8 Montrer que toute paramétrisation par $\mathbf{R}$ d'une demi-droite fermée est non régulière.

Exercice 9 Calculer la longueur de l'arc de parabole donné par $y = ax^2$, $x \in [0, k]$.

Exercice 10 Soit $a, b > 0$. Montrer que la longueur de l'ellipse donnée par

$$\gamma(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$$

est

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}dt.$$

Exercice 11 Soit $a > 0$. Calculer la longueur de l'arc $\gamma([0, t])$ si $t \in [0, 4\pi]$ et dessiner cet arc lorsque γ est la cycloïde

$$t \in \mathbf{R} \mapsto (a(t - \sin(t)), a(1 - \cos(t))).$$

Exercice 12 Soit $a > 0$. Calculer la longueur de l'arc $\gamma([0, t])$ si $t \in \mathbf{R}$ et dessiner cet arc lorsque γ est la chaînette

$$t \in \mathbf{R} \mapsto (t, a\cosh(\frac{t}{a})).$$