Université de Rennes
UFR Mathématiques

L3 Mathématiques

2024-2025

Courbes et surfaces paramétrées

Version en construction et non relue du 7 janvier 2025

Ce document, encore en phase de construction, est une introduction à l'étude des courbes et des surfaces. Il est formé de deux parties, la première contient des rappels théoriques et la seconde est consacrée aux courbes et aux surfaces.

Texte produit avec LaTeX, Geogebra, Fig4tex, Python, papier et crayon.

Programme

Courbes

Courbes régulières. Donner plusieurs exemples. Changement de paramètre admissible.

Vecteur tangent, longueur d'une courbe et abscisse curviligne.

Vecteur normal, courbure.

Produit vectoriel. Trièdre de Serret-Frénet et torsion.

Exemples de courbes en coordonnées polaires.

Surfaces

Surfaces régulières. Donner plusieurs exemples (surfaces de révolution).

Plan tangent, vecteur normal et application de Gauss. Première forme fondamentale et aire d'une surface.

Bibliographie

• M. Audin, Géométrie, EDP Sciences, 2006

• M. Baker, Cours sur les courbes et surfaces paramétrées (et TD)

• M. Berger et B. Gostiaux, Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces, PUF, 1987

• E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, Cours de mathématiques spéciales, Masson, 1981

• Wikipedia

Première partie

Rappels théoriques

1 Espace vectoriel, espace affine, espace vectoriel euclidien, espace affine euclidien

1.1 Espace vectoriel

Définition 1.1 Un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, ou $\mathbf{R}$-espace vectoriel, ou encore,en sous-entendant $\mathbf{R}$, un espace vectoriel, est un triplet $(E, +, \cdot)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- E est un ensemble non vide ;

- $+ : E \times E \to E$ est une loi de composition interne ;

- $\cdot : \mathbf{R} \times E \to E$ est une loi externe ;

- le couple $(E, +)$ est un groupe commutatif ;

- la loi externe $\cdot$ est distributive par rapport à la loi de composition interne $+$

$$\lambda \cdot (a+b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b \qquad\qquad (\lambda+\mu)\cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$$

si $a, b \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$;

- la loi externe $\cdot$ vérifie une associativité *mixte* et possède un bon comportement vis à vis de 1 qui est l'unité de $\mathbf{R}$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot a) = (\lambda\mu)\cdot a \qquad\qquad 1 \cdot a = a$$

si $a \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

Remarque 1.1 Si dans la définition précédente on remplace $\mathbf{R}$ par un corps commutatif $\mathbf{K}$ on obtient la définition d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, dit aussi espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.

Définition 1.2 Une algèbre sur un corps commutatif $\mathbf{K}$ est la donnée d'un quadruplet $(\mathbf{A}, +, \cdot, \times)$ tel que $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ soit un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(\mathbf{A}, +, \times)$ soit un anneau. Elle est dite commutative si $\times$ est commutative.

Convention 1.1 Dans ce cours, sauf exception explicitement indiquée, il sera toujours question de $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Aussi le corps $\mathbf{R}$ ne sera pas explicitement nommé et on parlera d'espace vectoriel.

Remarque 1.2 La loi externe est appelée multiplication par un scalaire. Souvent on ne la note pas.

Définition 1.3 Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés vecteurs.

Exemple 1.1 Le triplet $(\{0\}, +, \times)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Exemple 1.2 Le corps commutatif $(\mathbf{R}, +, \times)$ est lui-même un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Ici la loi $\cdot$ est la loi $\times$.

Exemples 1.3 • Étant donné $n \in \mathbf{N}$, si on pose

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n),$$

$$\lambda \cdot x = (\lambda \times x_1, ..., \lambda \times x_n)$$

quels que soient $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors $(\mathbf{R}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

• Si on pose

$$u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}},$$

$$\lambda \cdot u = (\lambda \times u_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

quels que soient $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

• Si E est un ensemble et si on pose

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ si } x \in E,$$

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x) \text{ si } x \in E$$

quelles que soient les applications $f \in \mathbf{R}^E$, $g \in \mathbf{R}^E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors on définit sur l'ensemble $\mathbf{R}^E$ des applications de E dans $\mathbf{R}$ une structure d'espace vectoriel : $(\mathbf{R}^E, +, \cdot)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

• Si E est un ensemble le quadruplet $(\mathbf{R}^E, +, \cdot, \times)$ où $\times$ désigne la multiplication de fonctions numériques est une algèbre commutative.

• Si E est un ensemble, si F est un espace vectoriel et si on pose

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ si } x \in E,$$
$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x) \text{ si } x \in E$$

quelles que soient les applications $f \in F^E$, $g \in F^E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors on définit sur l'ensemble F^E des applications de E dans F une structure d'espace vectoriel : $(F^E, +, \cdot)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

• Si E est un espace vectoriel alors l'ensemble $(E^E, +, \cdot, \circ)$, où $\circ$ désigne la composition des applications de E dans E, est une algèbre, non commutative si $E \neq \{0\}$.

1.2 Base d'un espace vectoriel

Définition 1.4 Une famille indexée $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est dite génératrice si pour tout $v \in E$, il existe un sous-ensemble fini J de I et pour tout $j \in J$ un réel λ_j tels que

$$v = \sum_{j \in J} \lambda_j v_j.$$

Définition 1.5 Une famille indexée $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est dite libre si pour tout sous-ensemble fini J de I et pour tout $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbf{R}^J$ l'égalité

$$0 = \sum_{j \in J} \lambda_j v_j$$

où 0 est le neutre de $(E, +)$ implique que tous les λ_j sont nuls.

Définitions 1.6 Une famille $(v_i)_{i \in I}$ est dite liée lorsqu'elle n'est pas libre. Deux vecteurs sont dits colinéaires lorsqu'ils forment une famille liée. L'un est alors obtenu en multipliant l'autre par un scalaire. Si ce scalaire est positif ou nul les deux vecteurs sont dits colinéaires et de même sens.

Définition 1.7 On appelle base d'un espace vectoriel une famille indexée de vecteurs qui est génératrice et libre.

Notation 1.1 Soit I un ensemble. Alors on pose $\delta_{ij} = 0$ pour tous les $i, j \in I$ tels que $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1$ pour tout $i \in I$.

Exemple 1.4 Les vecteurs $v_j = (\delta_{ij})_{i \in \{1,...,n\}}$ lorsque $j \in \{1, ..., n\}$ forment une base de $\mathbf{R}^n$ appelée base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Théorème 1.1 *Un espace vectoriel possède au moins une base.*

Proposition 1.1 *Si $(v_i)_{i \in I}$ est une base d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ alors, pour tout $v \in E$ il existe un unique $J \subset I$ et un unique $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbf{R}^J$ tel que*

$$v = \sum_{j \in J} \lambda_j v_j.$$

La famille $(\lambda_j)_{j \in J}$ forme les coordonnées de v dans la base $(v_i)_{i \in I}$.

Définition 1.8 Un espace vectoriel qui possède une base de cardinal fini est dit de dimension finie. Sinon il est dit de dimension infinie

Théorème 1.2 *Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal.*

1.3 Sous-espace vectoriel

Définition 1.9 Si $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel de dimension finie, sa dimension, noté $\dim(E)$ est le cardinal commun à toutes ses bases.

Définition 1.10 Un sous espace-vectoriel d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est un sous-ensemble non vide de E, stable par addition et par multiplication par un scalaire et tel que les deux lois induites lui confèrent une structure d'espace vectoriel.

Proposition 1.2 *Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. Un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel si et seulement s'il est non vide et quel que soit $(u, v, \lambda) \in F^2 \times \mathbf{R}$ les vecteurs $u + v$ et λu appartiennent à F.*

Proposition 1.3 *Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie égale à n est aussi de dimension fine et celle-ci est au plus n. Si elle vaut n alors le sous-espace vectoriel est égal à l'espace vectoriel.*

1.4 Application linéaire

Définition 1.11 Une application linéaire est une application $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ qui vérifie les conditions suivantes : si $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors $f(u + v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$. Son noyau $\ker(f)$ est l'image réciproque $f^{-1}(0)$ du vecteur nul de F et son image $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble image $f(E)$.

Proposition 1.4 *Si $f : E \to F$ est une application linéaire alors l'image $f(E')$ d'un sous-espace vectoriel E' de E est un sous-espace vectoriel de F et l'image réciproque $f^{-1}(F')$ d'un sous-espace vectoriel F' de F est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition 1.12 Une forme linéaire est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans $\mathbf{R}$.

Proposition 1.5 *Si $f : E \to F$ et $g : E \to F$ sont deux applications linéaires et si $\lambda \in \mathbf{R}$ alors la somme $f + g$ et le produit λf le sont aussi.*

Proposition 1.6 *L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel* $(F^E, +, \cdot)$.

Exemple 1.5 L'ensemble E^* des formes linéaires définies sur un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbf{R}^E, +, \cdot)$.

Proposition 1.7 *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications linéaires alors la composée $g \circ f$ l'est aussi.*

Proposition 1.8 *La réciproque f^{-1} d'une application linéaire bijective $f : E \to F$ est une application linéaire.*

Proposition 1.9 *L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans lui-même, muni des lois internes $+$ et $\circ$ et de la multiplication par un scalaire, est une algèbre, non commutative si la dimension de E est supérieure ou égale à 2. L'identité de E qui est une application linéaire est l'élément neutre pour $\circ$.*

Proposition 1.10 *L'ensemble des applications linéaires inversibles d'un espace vectoriel E dans lui-même, muni de la loi de composition des applications, est un groupe, non commutatif si la dimension de E est supérieure ou égale à 2.*

Proposition 1.11 *Une application linéaire $f : E \to F$ est totalement déterminée par la connaissance de son action sur une base de l'espace de départ.*

Proposition 1.12 *Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée.*

Théorème 1.3 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies. Alors* $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$.

Corollaire 1.1 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies. Alors f est bijective si et seulement si d'une part les deux espaces ont même dimension et d'autre part f est injective ou surjective.*

Proposition 1.13 *Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au singleton $\{0\}$.*

1.5 Matrice d'une application linéaire

Définition 1.13 Soit $n, m \in \mathbf{N}$. Une matrice (n, m) est un élément $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\{1,...,m\}\\ j\in\{1,...,n\}}}$ de l'espace vectoriel $M_{nm}(\mathbf{R}) = (\mathbf{R}^{\{1,...,m\}\times\{1,...,n\}}, +, \cdot)$.

Définition 1.14 Soit $n, m, p \in \mathbf{N}$. Le produit $C = A \times B$ de deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\{1,...,m\}\\ j\in\{1,...,n\}}} \in M_{nm}(\mathbf{R})$ et $B = (a_{jk})_{\substack{j\in\{1,...,n\}\\ k\in\{1,...,p\}}} \in M_{mp}(\mathbf{R})$ est la matrice $C = (c_{ik})_{\substack{i\in\{1,...,m\}\\ k\in\{1,...,p\}}} \in M_{np}(\mathbf{R})$ définie par

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \text{ pour } i \in \{1, ..., m\} \text{ et } k \in \{1, ..., p\}.$$

Proposition 1.14 *Si $n \in \mathbf{N}$ alors la loi $\times$ confère à $M_{nn}(\mathbf{R})$ une structure d'algèbre, non commutative si $n \geq 2$.*

Proposition 1.15 *On considère $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies n et m. Soit $b = (v_1, ..., v_n)$ une base de E et $\tilde{b} = (\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_m)$ une base de F. Alors la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\{1,...,m\}\\ j\in\{1,...,n\}}}$ dont les colonnes sont les coordonnées des images $f(v_j)$ dans la base $\tilde{b}$ détermine f de façon biunivoque. Elle est appelée matrice de f relativement aux bases b et $\tilde{b}$ et est notée* $\mathrm{Mat}(f)_b^{\tilde{b}}$.

Proposition 1.16 *Si E est un espace vectoriel de dimension n alors l'espace vectoriel E^* est aussi de dimension n.*

Remarque 1.3 Si b est une base d'un espace vectoriel E de dimension finie n alors la matrice $\mathrm{Mat}(Id_E)_b^b$ de l'identité de E relativement à la base b est la matrice diagonale $I_n = (\delta_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}}$ avec $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.17 *On considère $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires entre des espaces vectoriels de dimensions finies. Soit b une base de E, $\tilde{b}$ une base de F et $\hat{b}$ une base de G. Alors*

$$\mathrm{Mat}(g \circ f)_b^{\hat{b}} = \mathrm{Mat}(g)_{\tilde{b}}^{\hat{b}} \times \mathrm{Mat}(f)_b^{\tilde{b}}.$$

Définition 1.15 Si b et $\tilde{b}$ sont deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie alors la matrice $\mathrm{Mat}(Id_E)_b^{\tilde{b}}$ de l'identité de E relativement aux bases b et $\tilde{b}$ s'appelle matrice de changement de base.

Proposition 1.18 *Si b et $\tilde{b}$ sont deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie alors la matrice de changement de base $\mathrm{Mat}(Id_E)_b^{\tilde{b}}$ permet d'exprimer les coordonnées d'un vecteur v relativement à la base $\tilde{b}$ à partir de ses coordonnées relativement à la base b.*

Proposition 1.19 *Si b et $\tilde{b}$ sont deux bases d'un espace vectoriel E de dimension* *finie alors les matrices de changement de base* $\mathrm{Mat}(Id_E)_b^{\tilde{b}}$ *et* $\mathrm{Mat}(Id_E)_{\tilde{b}}^{b}$ *vérifient*

$$\mathrm{Mat}(Id_E)_{\tilde{b}}^{b} \times \mathrm{Mat}(Id_E)_b^{\tilde{b}} = \mathrm{Mat}(Id_E)_b^b = I_n.$$

Proposition 1.20 *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $f : E \to F$ une application linéaire bijective, b une base de E et $\tilde{b}$ une base de F. Alors E et F possèdent la même dimension n et*

$$\mathrm{Mat}(f^{-1})_{\tilde{b}}^{b} \times \mathrm{Mat}(f)_b^{\tilde{b}} = \mathrm{Mat}(Id_E)_b^b = I_n = \mathrm{Mat}(Id_F)_{\tilde{b}}^{\tilde{b}} = \mathrm{Mat}(f)_b^{\tilde{b}} \times \mathrm{Mat}(f^{-1})_{\tilde{b}}^{b}.$$

1.6 Déterminant

Définition 1.16 Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathbf{N}^*$. Une p-forme linéaire antisymétrique Θ est une application $\Theta : E^p \to \mathbf{R}$ linéaire par rapport à chaque facteur et telle que si σ est une permutation de $\{1, ..., p\}$ de signature $\varepsilon(\sigma)$ et si $(v_1, ..., v_p) \in E^p$ alors

$$\Theta(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)}) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\Theta(v_1, ..., v_p).$$

Proposition 1.21 *Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathbf{N}^*$. L'ensemble des p-formes linéaires antisymétriques de E est un sous-espace vectoriel de $(\mathbf{R}^{E^p}, +, \cdot)$.*

Théorème 1.4 *Soit E un espace vectoriel de dimension n. L'espace vectoriel des n-formes linéaires antisymétriques de E est de dimension* 1.

Définition 1.17 Soit E un espace vectoriel de dimension n. Si b est une base E il existe une une seule n-forme linéaire et antisymétrique de E qui prend la valeur 1 en b. Cette n-forme est appelée déterminant relativement à la base b et elle est notée $\det_b$. Elle est caractérisée par l'égalité $\det_b(b) = 1$.

Proposition 1.22 *Soit E un espace vectoriel de dimension n et b est une base E. Si $(v_1, ..., v_n)$ n'est pas une famille libre alors le déterminant $\det_b(v_1, ..., v_n)$ est nul.*

Définitions 1.18 Soit E un espace vectoriel de dimension n et $b = (b_1, ..., b_n)$ une base de E.

• Le déterminant d'une famille de n vecteurs $v_1, ..., v_n$ de E relativement à la base b est le nombre $\det_b(v_1, ..., v_n)$.

• Le déterminant $\det_b(f)$ d'une application linéaire f de E dans lui-même relativement à la base b est le déterminant $\det_b(f(b_1), ..., f(b_n))$ de la famille des n vecteurs $f(b_1), ..., f(b_n)$ relativement à la base b.

Exemple 1.6 Si E est un espace vectoriel de dimension finie et b une de ses bases alors $\det_b(Id_E) = 1$.

Proposition 1.23 *On considère f et g deux applications linéaires d'un espace vectoriel E de dimension finie dans lui-même et soit b une base de E. Alors*

$$\det_b(g \circ f) = \det_b(g) \times \det_b(f).$$

Corollaire 1.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, b une base de E et f une application linéaire bijective de E dans lui-même. Alors*

$$\det_b(f^{-1}) \times \det_b(f) = 1.$$

Proposition 1.24 *Si E est un espace vectoriel de dimension n et b une de ses bases alors le déterminant $\det_b(v_1, ..., v_n)$ des n vecteurs $v_1, ..., v_n$ relativement à la base b est non nul si et seulement si la famille $(v_1, ..., v_n)$ est libre.*

Proposition 1.25 *Si b, $\tilde{b}$ et $\hat{b}$ sont trois bases d'un espace vectoriel E de* *dimension n alors*

$$\det_b(\hat{b}) = \det_{\tilde{b}}(\hat{b}) \times \det_b(\tilde{b}).$$

Définition 1.19 Le déterminant $\det(A)$ d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\ j\in\{1,\ldots,n\}}}$ est le déterminant de ses n vecteurs colonnes $A_1 = (a_{i1})_{i\in\{1,\ldots,n\}}, \ldots, A_n = (a_{in})_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Exemple 1.7 Si $n \in \mathbf{N}^*$ alors $\det(I_n) = 1$.

Proposition 1.26 *On considère A et B deux matrices carrées (n, n). Alors*

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B).$$

Corollaire 1.3 *Soit A une matrice carrée (n, n) et inversible. Alors*

$$\det(A^{-1}) \times \det(A) = 1.$$

Théorème 1.5 *Le déterminant $\det(A)$ d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\ j\in\{1,\ldots,n\}}}$ et le déterminant $\det(A^{tr})$ de sa transposée $A^{tr} = (a_{ji})_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\ j\in\{1,\ldots,n\}}}$ sont égaux :*

$$\det(A) = \det(A^{tr}).$$

1.7 Orientation

Définition 1.20 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Une base b définit la même orientation de E qu'une base $\tilde{b}$ si $\det_b(\tilde{b}) > 0$.

Proposition 1.27 *Définir la même orientation d'un espace vectoriel de dimension finie est une relation d'équivalence qui possède exactement deux classes.*

Exemple 1.8 Si $b = (b_1, ..., b_n)$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension finie et si σ est une permutation de $\{1, ..., n\}$ alors b définit la même orientation de E que $b_\sigma = (b_{\sigma(1)}, ..., b_{\sigma(n)})$ si et seulement si la signature $\varepsilon(\sigma)$ de σ vaut 1.

Définition 1.21 Un espace vectoriel orienté est un espace vectoriel pour lequel une orientation a été choisie.

Exemples 1.9 • La droite vectorielle $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ admet deux orientations, celle définie par la base $b_1 = (1)$ dont l'unique vecteur est 1, et cette définie par la base $b_{-1} = (-1)$ dont l'unique vecteur est -1.

• Le plan vectoriel $(\mathbf{R}^2, +, \cdots)$ admet deux orientations, celle définie par la base $((1, 0), (0, 1))$ et celle définie par la base $((1, 0), (0, -1))$.

Définition 1.22 Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel orienté donc munie d'une orientation. Une base est dite directe si elle définit cette orientation, sinon elle est dite indirecte.

1.8 Espace vectoriel euclidien

Définition 1.23 Un espace vectoriel euclidien est un quadruplet $(E, +, \cdot, < \, , \, >)$ où $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $< \, , \, >$ est un produit scalaire. Ceci signifie que $< \, , \, >$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$ telle que si $u, v, w \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ alors :

• $0 \leq < v, v >$ et $< v, v >= 0$ si et seulement si $v = 0$;

• $< v, w >=< w, v >$;

• $< \lambda u + \mu v, w >= \lambda < u, w > +\mu < v, w >$.

Proposition 1.28 *Si v et w sont deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien $(E, +, \cdot, < \, , \, >)$ alors :*

• *$< v+w, v+w > = < v, v > + 2 < v, w > + < w, w >$;*

• *$\sqrt{< v+w, v+w >} \leq \sqrt{< v, v >} + \sqrt{< w, w >}$ et l'égalité n'a lieu que si v et w sont colinéaires et de même sens ;*

• *$< v, w > \leq \sqrt{< v, v >} \times \sqrt{< w, w >}$ et l'égalité n'a lieu que si v et w sont colinéaires et de même sens.*

Définition 1.24 Deux vecteurs u et v d'un espace vectoriel euclidien sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul : $< u, v > = 0$.

Exemple 1.10 On munit $(\mathbf{R}^n, +, \cdot)$ d'une structure d'espace vectoriel euclidien en posant

$$< v, w > = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

pour tout $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbf{R}^n$ et $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbf{R}^n$.

Définition 1.25 Si $(E, +, \cdot, < \, , \, >)$ est un espace vectoriel euclidien, la norme euclidienne associée est l'application notée $|| \cdot ||$ qui à $v \in E$ associe
$||v|| = \sqrt{< v, v >}$.

Proposition 1.29 *Si v et w sont deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien est un quadruplet $(E, +, \cdot, < \, , \, >)$ alors :*

• *$||v+w||^2 = ||v||^2 + 2 < v, w > + ||w||^2$;*

• *$||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$ et l'égalité n'a lieu que si v et w sont colinéaires et de même sens ;*

• *$< v, w > \leq ||v|| \times ||w||$ et l'égalité n'a lieu que si v et w sont colinéaires et de même sens.*

Définition 1.26 Si u et v sont deux vecteurs non nuls d'un espace vectoriel euclidien on définit le cosinus $\cos(u, v)$ de u et v par

$$\cos(u, v) = \frac{< u, v >}{||u|| \cdot ||v||}$$

et le sinus $\sin(u, v)$ de u et v par

$$\sin(u, v) = \sqrt{1 - \cos^2(u, v)}.$$

Remarque 1.4 Ces définitions imposent au sinus d'être positif ou nul contrairement à la définition classique du sinus en dimension 2.

Définition 1.27 Un vecteur d'un espace vectoriel euclidien est dit unitaire si sa norme est 1.

Proposition 1.30 *Si $(E, +, \cdot, < \ , \ >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension n il possède une base orthonormale, c'est à dire une base $b = (b_1, ..., b_n)$ telle que pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ on a $< v_i, v_j >= \delta_{ij}$: les vecteurs de la base sont orthogonaux et unitaires.*

Proposition 1.31 *Soit $(E, +, \cdot, < \ , \ >)$ un espace vectoriel euclidien de dimension n et b une base orthonormale de E. Soit $V \in E$ et $W \in E$. Si les coordonnées de V dans la base b sont $(v_1, ..., v_n)$ et celles de W sont $(w_1, ..., w_n)$ alors*

$$< V, W >= \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Corollaire 1.4 *Soit $(E, +, \cdot, < \ , \ >)$ un espace vectoriel euclidien de dimension n et b une base orthonormale de E. Soit $V \in E$. Si les coordonnées de V dans la base* *b sont* $(v_1, ..., v_n)$ *alors*

$$||V|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2}$$

et les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\max_{i \in \{1,...,n\}} |v_i| \leq ||V|| \leq \sqrt{n} \times \max_{i \in \{1,...,n\}} |v_i|.$$

Proposition 1.32 *Soit* $(E, +, \cdot, < \, , \, >)$ *un espace vectoriel euclidien de dimension* n*. Si* $V \in E$ *alors l'application qui à* $W \in E$ *associe le produit scalaire* $< V, W >$ *est une forme linéaire notée* V^**.*

Proposition 1.33 *Soit* $(E, +, \cdot, < \, , \, >)$ *un espace vectoriel euclidien de dimension* n*. Alors l'application qui à* $V \in E$ *associe* $V^* \in E^*$ *est une application linéaire bijective.*

Corollaire 1.5 *Soit* $(E, +, \cdot, < \, , \, >)$ *un espace vectoriel euclidien de dimension* n *et* b *une base orthonormale de* E*. Si* $l \in E^*$ *est une forme linéaire alors il existe un et un seul vecteur* $V \in E$ *tel que* $l = V^*$*. L'application ainsi définie de* E^* *dans* E *est une application linéaire qui est la réciproque de celle qui à* $V \in E$ *associe* V^**.*

Définition 1.28 Soit $(E, +, \cdot, < \, , \, >)$ un espace vectoriel euclidien de dimension n et F un sous-espace vectoriel de F. L'orthogonal $F^\perp$ de F est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F :

$$F^\perp = \{u \in E | \forall v \in F < u, v >= 0\}.$$

Proposition 1.34 *Soit* $(E, +, \cdot, < \, , \, >)$ *un espace vectoriel euclidien de dimension* n*. Si* F *est un sous-espace vectoriel de* F *alors son orthogonal* $F^\perp$ *est un sous-espace vectoriel de dimension* $n - p$ *de* E *et* $F = (F^\perp)^\perp$*.*

Définition 1.29 Soit $(E, +, \cdot, < \ , \ >)$ un espace vectoriel euclidien de dimension n. Une isométrie vectorielle f est une application linéaire de E dans E qui préserve le produit scalaire : pour tout $(v, w) \in E^2$

$$< f(v), f(w) >=< v, w > .$$

Proposition 1.35 *Soit $(E, +, \cdot, < \ , \ >)$ un espace vectoriel euclidien de dimension n. Si $f : E \to E$ et $g : E \to$ sont des isométries vectorielles alors la composée $g \circ f$ est une isométrie vectorielle.*

Proposition 1.36 *Soit $(E, +, \cdot, < \ , \ >)$ un espace vectoriel euclidien de dimension n et b une base orthonormale de E. Si f est une isométrie vectorielle alors l'image $\tilde{b} = f(b)$ de b par f est une base orthonormale de E.*

Proposition 1.37 *Soit $(E, +, \cdot, < \ , \ >)$ un espace vectoriel euclidien de dimension n et b une base orthonormale de E. Si f est une isométrie vectorielle et A sa matrice relativement à la base b alors $A^{tr} \times A = I_n$. En particulier f est une bijection, sa réciproque est une isométrie vectorielle et $\det_b(f) = \pm 1$.*

Proposition 1.38 *L'ensemble des isométries vectorielles d'un espace vectoriel E dans lui-même, muni de la loi de composition des applications, est un groupe, non commutatif si la dimension de E est supérieure ou égale à 2.*

Proposition 1.39 *Les isométries vectorielles de $\mathbf{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique sont de deux types, les rotations, de déterminant 1 et qui respectent l'orientation, et les réflexions euclidiennes, de déterminant -1 et qui inversent l'orientation. Les matrices de rotation, relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^2$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbf{R}$. Les matrices de* *réflexion euclidienne, relativement à la base canonique de* $\mathbf{R}^2$ *sont les matrices de la forme* $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ *avec* $\theta \in \mathbf{R}$.

1.9 Produit vectoriel

Définition 1.30 Soit $(E, +, \cdot, <\ ,\ >)$ un espace vectoriel euclidien de dimension n et b une base orthonormale de E. Si $(v_1, ..., v_{n-1})$ est une famille de $n-1$ vecteurs de E alors l'application l qui à $v \in E$ associe $l(v) = \det_b(v_1, ..., v_{n-1}, v)$ est une application linéaire l. Il existe donc un unique $V \in E$ tel que $l = V^*$. Le vecteur V ainsi défini s'appelle le produit vectoriel de $(v_1, ..., v_{n-1})$ relativement à la base b et il est noté $v_1 \wedge_b ... \wedge_b v_{n-1}$.

Proposition 1.40 *Soit* $(E, +, \cdot, <\ ,\ >)$ *un espace vectoriel euclidien de dimension* n*,* b *une base orthonormale de* E *et* f *une isométrie vectorielle. Si* $(v_1, ..., v_{n-1})$ *est une famille de* $n-1$ *vecteurs de* E *alors*

$$f(v_1 \wedge_b ... \wedge_b v_{n-1}) = f(v_1) \wedge_b ... \wedge_b f(v_{n-1}).$$

Proposition 1.41 *Soit* $(E, +, \cdot, <\ ,\ >)$ *un espace vectoriel euclidien de dimension* n *et* b *une base orthonormale de* E*. Alors l'application de* E^{n-1} *dans* E *qui à* $(v_1, ..., v_{n-1}) \in E^{n-1}$ *associe* $v_1 \wedge_b ... \wedge_b v_{n-1}$ *est une application multilinéaire et antisymétrique. Si* $\tilde{b}$ *est une base orthonormale alors* b *et* $\tilde{b}$ *définissent le même produit vectoriel si elles définissent la même orientation et elles définissent des orientations opposées si elles ne définissent pas la même orientation.*

Définition 1.31 Soit $(E, +, \cdot, <\ ,\ >)$ un espace vectoriel euclidien orienté. On appelle produit vectoriel le produit vectoriel défini à partir de l'une quelconques de ses bases orthonormales représentant son orientation.

Proposition 1.42 *Soit $(E, +, \cdot, < \ , \ >)$ un espace vectoriel orienté de dimension 3. Si u et v sont non colinéaires alors le produit vectoriel $u \wedge v$ est l'unique vecteur orthogonal à u et v qui vérifie $||u \wedge v|| = \sin(u, v) \cdot ||u|| \cdot ||v||$ et $(u, v, u \wedge v)$ base directe.*

Proposition 1.43 *Soit $(E, +, \cdot, < \ , \ >)$ un espace vectoriel orienté de dimension 3. Alors*

- $u \wedge v + v \wedge u = 0$;
- $< u, u \wedge v >=< v, u \wedge v) = 0$;
- $u \wedge (v \wedge w) =< u, w > v- < u, v > w$;
- $(u \wedge v) \wedge w =< u, w > v- < v, w > u$;
- $u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0$ *(identité de Jacobi)*
- $||u \wedge v||^2+ < u, v >^2= ||u||^2||v||^2$.

1.10 Espace affine

Définition 1.32 Soit E un espace vectoriel. Un espace affine dirigé par E est la donnée d'un ensemble $\mathcal{E}$ et d'une application de $E \times \mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$,

$$(v, x) \in E \times \mathcal{E} \mapsto x + v \in \mathcal{E}$$

et vérifiant les propriétés suivantes :

- $(x + v) + w = x + (v + w)$ si $x \in \mathcal{E}$ et $v, w \in E$;
- à $x \in \mathcal{E}$ fixé, l'application $v \in E \mapsto x + v \in \mathcal{E}$ est une bijection.

Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés des points.

La dimension de $\mathcal{E}$ est par définition celle de E.

Remarque 1.5 La notation + n'est pas à confondre avec l'addition de vecteurs également notée avec ce symbole.

Définitions 1.33 • Une droite affine est un espace affine de dimension 1

• Un plan affine est un espace affine de dimension 2.

Définition 1.34 Des points d'un espaces affines sont dits alignés s'ils appartiennent à la même droite affine.

Définitions 1.35 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par un espace vectoriel E.

• L'espace E s'appelle direction de $\mathcal{E}$.

• Si $v \in E$ l'application $t_v : x \in \mathcal{E} \mapsto t_v(x) = x + v \in \mathcal{E}$ s'appelle translation de vecteur v. Si $v, w \in E$ alors $t_{v+w} = t_w \circ t_v$.

• Si $x, y \in \mathcal{E}$ alors l'unique vecteur $v \in E$ tel que $y = x + v$ est noté $\overrightarrow{xy}$.

Exemples 1.11 • Un espace vectoriel est un espace-affine dirigé par lui-même.

• Si $a \in \mathbf{R}^p$ alors on munit le sous ensemble $\mathcal{E} = \{(a, u) | u \in \mathbf{R}^q\}$ de $\mathbf{R}^{p+q}$ d'une structure d'espace affine dirigé par l'espace vectoriel $\mathbf{R}^q$ en posant, si $x = (a, u) \in \mathcal{E}$ et $v \in \mathbf{R}^q$, $t_v(x) = x + v = (a, u + v)$.

• Si E est un espace vectoriel, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et $a \in E$ alors l'ensemble $\mathcal{F} = \{a + v | v \in F\}$ est un espace affine dirigé par F.

• Si a et b sont deux points distincts d'un espace affine $\mathcal{E}$ alors l'ensemble

$$\delta_{ab} = \{a + t\overrightarrow{ab} | t \in \mathbf{R}\}$$

est la droite affine qui passe par a et b.

• Si $a = (x_a, y_a)$ et $b = (x_b, y_b)$ sont deux points distincts de $\mathbf{R}^2$ alors la droite affine δ_{ab} qui passe par a et b est donnée par

$$\delta_{ab} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | (y_b - y_a)(x - x_a) - (x_b - x_a)(y - y_a)\}.$$

Définition 1.36 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par un espace vectoriel E. Si $a \in \mathcal{E}$ et si F est un sous-espace vectoriel de E alors le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ défini par

$$\mathcal{F} = \{a + v | v \in F\}$$

est appelé sous-espace affine dirigé par F.

Remarque 1.6 Un sous-espace affine possède naturellement une structure d'espace affine.

Définition 1.37 Deux sous-espaces affines d'un espace affine sont dits parallèles s'ils ont même direction.

Définition 1.38 Un repère affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ est un couple (a, b) où a est un point de $\mathcal{E}$ et b une base de la direction E de $\mathcal{E}$.

Définition 1.39 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et soit (a, b) un repère affine. Si x est un point de E, ses coordonnées dans le repère affine (a, b) sont les coordonnées dans la base b de l'unique vecteur v de E tel que $x = a + v = t_v(a)$.

Définition 1.40 Une application affine $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ entre deux espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est une application vérifiant les propriétés suivantes. Il existe une application linéaire $f : E \to F$ entre les directions E et F de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ telle que si $a, b \in \mathcal{E}$ alors $\overrightarrow{\phi(a)\phi(b)} = f(\overrightarrow{ab})$. L'application linéaire f est appelée l'application linéaire associée à ϕ ou partie linéaire de ϕ.

Proposition 1.44 *Une application affine préserve l'alignement et le parallélisme.*

Proposition 1.45 *Si $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une application affine et f l'application linéaire associée alors l'image $\phi(\mathcal{E}')$ d'un sous-espace affine $\mathcal{E}'$ dirigé par E' de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$ dirigé par $f(E')$ et l'image réciproque $f^{-1}(F')$ d'un sous-espace affine $\mathcal{F}'$ dirigé par F' de $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E dirigé par $f^{-1}(F')$.*

Proposition 1.46 *La composée $\psi \circ \phi : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ de deux applications affines $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ et $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est une application affine.*

Proposition 1.47 *L'ensemble des applications affines d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans lui-même, muni des lois internes $+$ et $\circ$ et de la multiplication par un scalaire, est une algèbre, non commutative si $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à un point. L'identité de $\mathcal{E}$ qui est une application affine est l'élément neutre pour $\circ$.*

Proposition 1.48 *La réciproque d'une application affine bijective est une application affine.*

Proposition 1.49 *L'ensemble des applications affines bijectives d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans lui-même, muni de la loi de composition des applications, est un groupe, non commutatif si $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à un point.*

Proposition 1.50 *Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$, a un point de $\mathcal{F}$ et soit $b = (b_1, ..., b_d)$ une base de sa direction F. Alors l'application $\phi : \mathbf{R}^d \to \mathcal{E}$ définie par*

$$\phi(t_1, ..., t_d) = a + \sum_{i=1}^{d} t_i b_i$$

si $(t_1, ..., t_d) \in \mathbf{R}^d$ est une bijection affine entre $\mathbf{R}^d$ et $\mathcal{F}$ appelée paramétrisation affine de $\mathcal{F}$.

Définition 1.41 Un espace affine est dit orienté si sa direction est orientée

Définition 1.42 Soit $a_1, ..., a_d$ des points d'un espace affine $\mathcal{E}$ et $t_1, ..., t_d$ des réels qui vérifient $\sum_{i=1}^{d} t_i = 1$. On appelle barycentre des points $a_1, ..., a_d$ affectés des poids $t_1, ..., t_d$ l'unique point b également noté $\sum_{i=1}^{d} t_i a_i$ tel que $\sum_{i=1}^{d} t_i \overrightarrow{a_i b} = 0$.

1.11 Convexité

Définition 1.43 Un sous-ensemble I d'un espace affine $\mathcal{E}$ est un segment s'il existe $a, b \in \mathcal{E}$ tels que

$$I = \{x \in \mathcal{E} | \exists t \in [0,1]\ (1-t)\overrightarrow{ax} + t\overrightarrow{bx} = 0\}.$$

Autrement dit le segment $[a, b]$ est l'ensemble des barycentres de a et b affectés de poids positifs.

Définition 1.44 Un sous-ensemble C d'un espace affine $\mathcal{E}$ est dit convexe si quel que soit $(a, b) \in C$ le segment $[a, b]$ est inclus dans C

Exemples 1.12 • Les intervalles de $\mathbf{R}$ sont les convexes de $\mathbf{R}$.

• Les carrés $]0,1[^2$ et $[0,1]^2$ sont des convexes de $\mathbf{R}^2$.

• Le produit $\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$ et le produit $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ avec $a_1 \leq b_1$,...,$a_n \leq b_n$ sont des convexes de $\mathbf{R}^n$.

• Si $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$ et $R \in \mathbf{R}^+$, la boule ouverte $B_n(a, R)$ de centre a et de rayon R définie par

$$B_n(a, R) = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n | \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < R^2\}$$

est un convexe de $\mathbf{R}^n$.

• Si $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$ et $R \in \mathbf{R}^+$, la boule fermée $\overline{B}_n(a, R)$ de centre a et de rayon R définie par

$$\overline{B}_n(a, R) = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n | \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \leq R^2\}$$

est un convexe de $\mathbf{R}^n$.

Proposition 1.51 *Une intersection de convexes est convexe.*

Proposition 1.52 *L'image d'un convexe par une application affine est convexe.*

Définition 1.45 Soit C un sous-ensemble d'un espace affine. Une fonction numérique $f : C \to \mathbf{R}$ est dite convexe si C est convexe et si, quels que soient les points a et b de C et quel que soit $t \in [0, 1]$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Proposition 1.53 *Soit C un sous-ensemble d'un espace affine $\mathcal{E}$. Une fonction numérique $f : C \to \mathbf{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe*

$$\text{epi}(f) = \{(x, t) \in \mathcal{E} \times \mathbf{R} | x \in C, t \geq f(x)\}$$

est convexe.

1.12 Espace affine euclidien

Définition 1.46 Un espace affine euclidien est un espace affine dont la direction est munie d'une structure d'espace vectoriel euclidien

Définition 1.47 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction un espace vectoriel euclidien E. La distance euclidienne $d(a, b)$ entre deux points a et b de $\mathcal{E}$ est la norme $||\overrightarrow{ab}||$ du vecteur $\overrightarrow{ab}$.

Proposition 1.54 *Soit a, b, c trois points d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Alors $s(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ et l'égalité n'a lieu que si a, b et c sont alignés et $b \in [a, c]$.*

Définition 1.48 Une isométrie affine est une application d'un espace affine euclidien dans lui-même qui conserve la distance euclidienne.

Proposition 1.55 *Les isométries affines sont les applications affines dont les parties linéaires sont des isométries vectorielles.*

Proposition 1.56 *La composée de deux isométries affines est une isométrie affine.*

Proposition 1.57 *Une isométrie affine d'un espace affine euclidien dans lui-même est une bijection et sa réciproque est une isométrie affine.*

Proposition 1.58 *L'ensemble des isométries affines d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ dans lui-même, muni de la loi de composition des applications, est un groupe, non commutatif si $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à un point.*

2 Topologie en dimension finie

2.1 Convergence d'une suite

Définitions 2.1 • Une suite u d'éléments d'un ensemble A est une application de $\mathbf{N}$ dans A. Elle est souvent notée $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et si $k \in \mathbf{N}$ l'image $u(k)$ de k par u est notée u_k.

• Une suite numérique est une suite à valeurs dans $\mathbf{R}$ (ou, lorsque c'est précisé, $\mathbf{C}$).

Définition 2.2 Une suite numérique $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est dite convergente si elle vérifie la propriété suivante :

$$\exists l \in \mathbf{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall k \in \mathbf{N}\ (k \geq N \Longrightarrow |u_k - l| < \varepsilon).$$

Proposition 2.1 *Si $u = (u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite numérique convergente alors le réel l, appelé limite de $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et noté $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k$ ou $\lim u$ et tel que*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall k \in \mathbf{N}\ (k \geq N \Longrightarrow |u_k - l| < \varepsilon),$$

est unique.

Exemples 2.1 • Si $l \in \mathbf{R}$ la suite constante égale à l est convergente de limite l.
• La suite $(\frac{1}{k+1})_{k\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite 0.
• La suite $(\frac{1}{2^k})_{k\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite 0.

Proposition 2.2 *La somme de deux suites numériques convergentes est une suite numérique convergente dont la limite est la somme des limites des suites initiales.*

Proposition 2.3 *Le produit de deux suites numériques convergentes est une suite numérique convergente dont la limite est le produit des limites des suites initiales.*

Proposition 2.4 *L'ensemble des suites numériques convergentes, muni des lois internes + et x et de la multiplication par un scalaire, est une algèbre commutative.*

Proposition 2.5 *L'inverse pour la multiplication d'une suite numérique convergente sans terme nul et de limite non nulle est une suite numérique convergente de limite l'inverse de la limite de la suite initiale.*

Définition 2.3 Une suite numérique qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemples 2.2 • La suite $((-1)^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est divergente.

• La suite $(k)_{k\in\mathbf{N}}$ est divergente.

• La suite $((-k)^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est divergente.

Définition 2.4 Une suite numérique $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est dite divergente vers $+\infty$ si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall A\in\mathbf{R}\ \exists N\in\mathbf{N}\ \forall k\in\mathbf{N}\ (k\geq N\Longrightarrow u_k>A).$$

Définition 2.5 Une suite numérique $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est dite divergente vers $-\infty$ si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall A\in\mathbf{R}\ \exists N\in\mathbf{N}\ \forall k\in\mathbf{N}\ (k\geq N\Longrightarrow u_k<A).$$

Exemples 2.3 • La suite $((-1)^k)_{k\in\mathbf{N}}$ n'est pas divergente vers $+\infty$ ou $-\infty$.

• La suite $(k)_{k\in\mathbf{N}}$ est divergente vers $+\infty$.

• La suite $(-k)_{k\in\mathbf{N}}$ est divergente vers $-\infty$.

• La suite $((-k)^k)_{k\in\mathbf{N}}$ n'est pas divergente vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Proposition 2.6 *La somme de deux suites divergentes vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est divergente vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).*

Proposition 2.7 *Le produit de deux suites divergentes toutes les deux vers soit $+\infty$ soit $-\infty$ est divergente vers $+\infty$.*

Proposition 2.8 *Le produit de deux suites numériques divergentes l'une vers $+\infty$ et l'autre vers $-\infty$ est divergente vers $-\infty$.*

Proposition 2.9 *Le produit d'un suite numérique convergente vers une limite l non nulle et d'une suite numérique divergente vers $+\infty$ ou $-\infty$ est divergente*

- vers $+\infty$ si $l > 0$ et la suite divergente initiale diverge vers $+\infty$ ou si $l < 0$ et la suite divergente initiale diverge vers $-\infty$;

- vers $-\infty$ si $l > 0$ et la suite divergente initiale diverge vers $-\infty$ ou si $l < 0$ et la suite divergente initiale diverge vers $+\infty$.

Proposition 2.10 *L'inverse pour la multiplication d'une suite numérique divergente vers $+\infty$ ou $-\infty$ est convergente de limite nulle.*

Proposition 2.11 *L'inverse pour la multiplication d'une suite numérique jamais nulle, de signe contant et convergente vers 0 est divergente vers $+\infty$ si la suite initiale est positive et vers $-\infty$ si la suite initiale est négative.*

Définition 2.6 Une suite numérique $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est dite bornée si elle vérifie la propriété suivante :

$$\exists L \in \mathbf{R}\ \forall k \in \mathbf{N}\ |u_k| \leq L.$$

Proposition 2.12 *Une suite numérique $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ convergente vers l est bornée et si L vérifie*

$$\forall k \in \mathbf{N}\ |u_k| \leq L$$

alors la $|l| \leq L$.

Définition 2.7 Si $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite, une suite $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est appelée suite extraite de $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ s'il existe une application $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante ($\phi(k) < \phi(l)$ si $k < l$) telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $v_k = u_{\phi(k)}$.

Proposition 2.13 *Soit suite numérique $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et L vérifiant*

$$\forall k \in \mathbf{N}\ |u_k| \leq L.$$

Alors toute suite extraite $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifie

$$\forall k \in \mathbf{N}\ |v_k| \leq L.$$

Théorème 2.1 *(de Bolzano-Weierstrass) Soit L un réel et $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite numérique vérifiant*

$$\forall k \in \mathbf{N}\ |u_k| \leq L.$$

Alors il existe une suite extraite $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ qui est convergente. Sa limite l vérifie

$$|l| \leq |L|.$$

Définition 2.8 Une suite $(U_k)_{k \in \mathbf{N}} \in (\mathbf{R}^n)^{\mathbf{N}} = (u_{1k}, ..., u_{nk})_{k \in \mathbf{N}} \in (\mathbf{R}^n)^{\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ est dite convergente de limite $l = (l1, ..., l_n)$ si chacune de ses suites coordonnées $(u_{ik})_{k \in \mathbf{N}}$, $i \in \{1, ..., n\}$, est convergente de limite l_i.

Proposition 2.14 *La somme de deux suites convergentes à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ est convergente et sa limite est la somme des limites des suites initiales.*

Proposition 2.15 *Le produit d'une suite numérique convergente et d'une suite convergente à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ est convergente et sa limite est le produit des limites des suites initiales.*

Proposition 2.16 *L'ensemble des suites convergentes à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, +, \cdot)$.*

2.2 Ouverts et fermés

Définition 2.9 Un sous-ensemble O de $\mathbf{R}^n$ est un ouvert si c'est la réunion de boules ouvertes.

Exemples 2.4 • Le vide est un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

• Les boules ouvertes sont des ouverts de $\mathbf{R}^n$.

• Le produit $\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$ avec $a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

• L'espace $\mathbf{R}^n$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 2.1 Si $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$ et si $R > 0$ alors

$$\prod_{i=1}^{n}]a_i - \frac{R}{\sqrt{n}}, a_i + \frac{R}{\sqrt{n}}[\subset B_n(a, R) \subset \prod_{i=1}^{n}]a_i - R, a_i + R[.$$

Définition 2.10 L'espace $\mathbf{R}^n$ est dit séparé au sens de Hausdorff. Ceci signifie que si a et b sont deux points distincts de $\mathbf{R}^n$ il existe deux ouverts O_a et O_b tels que $a \in O_a$, $b \in O_b$ et $O_a \cap O_b = \emptyset$. Il suffit de prendre les boules ouvertes $B_n(a, R)$ et $B_n(b, R)$ avec $0 < R < \frac{||\overrightarrow{ab}||}{2}$.

Proposition 2.17 *L'intersection de deux ouverts de* $\mathbf{R}^n$ *est un ouvert de* $\mathbf{R}^n$. *La réunion d'une famille d'ouverts de* $\mathbf{R}^n$ *est un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, *que la famille soit finie ou infinie.*

Proposition 2.18 *Si* O *est un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *et* O' *un ouvert de* $\mathbf{R}^{n'}$ *alors* $O \times O'$ *est un ouvert de* $\mathbf{R}^{n+n'}$.

Définition 2.11 L'intérieur $\text{int}(E)$ d'un sous-ensemble E de $\mathbf{R}^n$ est le plus grand ouvert de $\mathbf{R}^n$ inclus dans E.

Proposition 2.19 *L'intérieur* $\text{int}(E)$ *d'un sous-ensemble* E *de* $\mathbf{R}^n$ *est la réunion de toutes les boules ouvertes incluses dans* E.

Définition 2.12 Un sous-ensemble F de $\mathbf{R}^n$ est un fermé si c'est le complémentaire d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Exemples 2.5 • L'espace $\mathbf{R}^n$ est un fermé de $\mathbf{R}^n$.

• Les boules fermées sont des fermés de $\mathbf{R}^n$.

• Le produit $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ avec $a_1 \leq b_1$,...,$a_n \leq b_n$ est un fermé de $\mathbf{R}^n$.

• Le vide est un fermé de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 2.2 Si $a = \in \mathbf{R}^n$ et si $0 < R' < R$ alors

$$B_n(a, R') \subset \overline{B}_n(a, R') \subset B_n(a, R) \subset \overline{B}_n(a, R).$$

Remarque 2.3 Si $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$ et si $0 < R$ alors

$$\prod_{i=1}^{n}[a_i - \frac{R}{\sqrt{n}}, a_i + \frac{R}{\sqrt{n}}] \subset \overline{B}_n(a, R) \subset \prod_{i=1}^{n}[a_i - R, a_i + R].$$

Proposition 2.20 *La réunion de deux fermés de* $\mathbf{R}^n$ *est un fermé de* $\mathbf{R}^n$.

L'intersection d'une famille de fermés de $\mathbf{R}^n$ *est un fermé de* $\mathbf{R}^n$, *que la famille soit finie ou infinie.*

Exemples 2.6 • Le sous-ensemble $F = \{\frac{1}{k} | k \in \mathbf{N}^*\}$ est un fermé de $\mathbf{R}$.

• Soit $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite numérique qui diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Alors le sous-ensemble $\{u_k | k \in \mathbf{N}\}$ est un fermé de $\mathbf{R}$.

• Soit $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite numérique qui converge vers $l \in \mathbf{R}$. Alors le sous-ensemble $\{u_k | k \in \mathbf{N}\} \cup \{l\}$ est un fermé de $\mathbf{R}$.

• Le sous-ensemble de $\mathbf{R}$ formé des réels appartenant à $[0, 1]$ et qui peuvent s'écrire en base trois sans utiliser le chiffre 1 est un fermé appelé triadique de Cantor.

Proposition 2.21 *Si* F *est un fermé de* $\mathbf{R}^n$ *et* F' *un fermé de* $\mathbf{R}^{n'}$ *alors* $F \times F'$ *est un fermé de* $\mathbf{R}^{n+n'}$.

Proposition 2.22 *Un sous-ensemble F de $\mathbf{R}^n$ est fermé, si la limite de toute suite à valeurs dans F et convergente appartient à F.*

Définition 2.13 L'adhérence $\overline{E}$ d'un sous-ensemble E de $\mathbf{R}^n$ est le plus petit fermé de $\mathbf{R}^n$ contenant E.

Proposition 2.23 *L'adhérence $\overline{E}$ d'un sous-ensemble E de $\mathbf{R}^n$ est l'ensemble des limites possibles des suites de points de E.*

Proposition 2.24 *L'adhérence $\overline{E}$ d'un sous-ensemble E de $\mathbf{R}^n$ est le complémentaire de l'intérieur de son complémentaire :*

$$\overline{E} \cup \mathrm{int}(\mathbf{R}^n \setminus E) = \mathbf{R}^n \text{ et } \overline{E} \cap \mathrm{int}(\mathbf{R}^n \setminus E) = \emptyset.$$

Définition 2.14 La frontière ∂E d'un sous-ensemble E de $\mathbf{R}^n$ est la différence $\overline{E} \setminus \mathrm{int}(E)$ de son adhérence et de son intérieur.

Proposition 2.25 *La frontière ∂E d'un sous-ensemble E de $\mathbf{R}^n$ vérifie*

$$\partial E = \overline{E} \cap \overline{\mathbf{R}^n \setminus E}.$$

Exemples 2.7 • La frontière de la boule ouverte $B_n(a, R)$ de centre a et de rayon R est la sphère $S_{n-1}(a, R)$ définie par

$$S_{n-1}(a, R) = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n | \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = R^2\}.$$

• La frontière d'un segment de $\mathbf{R}$ est la réunion de ses extrémités et la frontière d'un segment de $\mathbf{R}^n$ avec $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ est le segment lui-même.

2.3 Continuité

Dans cette partie la continuité des fonctions vectorielles d'une ou de plusieurs variables réelles est étudiée.

Définition 2.15 Soit $X \subset \mathbf{R}^n$, $f : X \to \mathbf{R}^m$, $a \in \overline{X}$ et $l \in \mathbf{R}^m$. L'application f admet l comme limite au point a si quel que soit l'ouvert O' de $\mathbf{R}^m$ contenant l il existe un ouvert O de $\mathbf{R}^n$ et contenant a tel que $f^{-1}(O') = X \cap O$.

Proposition 2.26 *Soit $X \subset \mathbf{R}^n$, $f = (f_1, ..., f_m) : X \to \mathbf{R}^m$, $a \in \overline{X}$ et $l = (l_1, ..., l_m) \in \mathbf{R}^m$. L'application f admet l comme limite au point a si et seulement si chaque fonction coordonnée f_i, $i \in \{1, ..., m\}$ admet l_i comme limite au point a.*

Proposition 2.27 *La limite d'une application en un point, lorsqu'elle existe, est unique.*

Proposition 2.28 *Soit $X \subset \mathbf{R}^n$, $f : X \to \mathbf{R}^m$ et $g : X \to \mathbf{R}^m$ et $a \in \overline{X}$. Si f et g admettent l et l' comme limites au point a alors $f + g$ admet $l + l'$ comme limite au point a.*

Proposition 2.29 *Si $X \subset \mathbf{R}^n$ et $a \in \overline{X}$, l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbf{R}^m$ qui admettent une limite en a est un sous-espace vectoriel de $((\mathbf{R}^m)^X, +, \cdot)$.*

Proposition 2.30 *Soit $X \subset \mathbf{R}^n$, $f : X \to \mathbf{R}$, $g : X \to \mathbf{R}^m$ et $a \in \overline{X}$. Si f et g admettent l et l' comme limites au point a alors $f \times g$ admet $l \times l'$ comme limite au point a.*

Proposition 2.31 *Si $X \subset \mathbf{R}^n$ et $a \in \overline{X}$, l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbf{R}$ qui admettent une limite en a, muni des lois internes $+$ et x et de la multiplication par un scalaire, est une algèbre commutative.*

Définition 2.16 Soit $X \subset \mathbf{R}^n$, $f : X \to \mathbf{R}^m$ et $a \in X$. L'application f est dite continue au point a si quel que soit l'ouvert O' de $\mathbf{R}^m$ contenant $f(a)$ il existe un ouvert O de $\mathbf{R}^n$ et contenant a tel que $f^{-1}(O') = X \cap O$.

Remarque 2.4 Soit $X \subset \mathbf{R}^n$ et $a \in X$. Alors une application $f : X \to \mathbf{R}^m$ est continue en a si et seulement si f admet $f(a)$ comme limite au point a.

Proposition 2.32 *Soit $X \subset \mathbf{R}^n$, $f = (f_1, ..., f_m) : X \to \mathbf{R}^m$ et $a \in X$.*

L'application f est continue en a si et seulement si chaque fonction coordonnée f_i, $i \in \{1, ..., m\}$ est continue en a.

Proposition 2.33 *Soit $X \subset \mathbf{R}^n$, $f : X \to \mathbf{R}^m$ et $a = (a_1, ..., a_n) \in X$. On pose $f(a) = b = (b_1, ..., b_m)$. L'application f est continue en a si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x = (x_1, ..., x_n) \in X$$
$$\max_{k \in \{1,...,n\}} |x_k - a_k| < \eta \Longrightarrow \max_{l \in \{1,...,m\}} |f_l(x) - b_l| < \varepsilon.$$

Proposition 2.34 *(variante) Soit $X \subset \mathbf{R}^n$, $f : X \to \mathbf{R}^m$ et $a \in X$. L'application f est continue en a si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in X \ ||x - a|| < \eta \Longrightarrow ||f(x) - f(a)|| < \varepsilon.$$

Proposition 2.35 *Soit $X \subset \mathbf{R}^n$, $f : X \to \mathbf{R}^m$ et $a \in X$. L'application f est continue en a si pour toute suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de points de X convergente de limite a la suite $(f(u_k))_{k \in \mathbf{N}}$ est convergente de limite $f(a)$.*

Proposition 2.36 *Soit $X \subset \mathbf{R}^n$, $f : X \to \mathbf{R}^m$, $g : X \to \mathbf{R}^m$ et $a \in X$. Si f et g sont continues en a alors $f + g$ aussi.*

Proposition 2.37 *Si $X \subset \mathbf{R}^n$ et $a \in X$, l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbf{R}^m$ et continues en a est un sous-espace vectoriel de $((\mathbf{R}^m)^X, +, \cdot)$.*

Proposition 2.38 *Soit $X \subset \mathbf{R}^n$, $f : X \to \mathbf{R}$, $g : X \to \mathbf{R}^m$ et $a \in X$. Si f et g sont continues en a alors $f \times g$ aussi.*

Proposition 2.39 *Si $X \subset \mathbf{R}^n$ et $a \in X$, l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbf{R}$ et continues en a, muni des lois internes $+$ et x et de la multiplication par un scalaire, est une algèbre commutative.*

Définition 2.17 Soit $X \subset \mathbf{R}^n$ et $f : X \to \mathbf{R}^m$. L'application f est dite continue si elle est continue en tout $a \in X$. Elle est aussi dite C^0.

Notation 2.1 Soit $X \subset \mathbf{R}^n$. On note $C^0(X, \mathbf{R}^m)$ l'ensemble des applications continues de X dans $\mathbf{R}^m$.

Proposition 2.40 *Si $X \subset \mathbf{R}^n$, l'ensemble $C^0(X, \mathbf{R}^m)$ est un sous-espace vectoriel de $((\mathbf{R}^m)^X, +, \cdot)$.*

Proposition 2.41 *Si $X \subset \mathbf{R}^n$, le quadruplet $(C^0(X, \mathbf{R}), +, \cdot, \times)$ est une algèbre commutative.*

Proposition 2.42 *Soit $X \subset \mathbf{R}^n$ et $f : X \to \mathbf{R}^m$. L'application f est continue si et seulement si pour tout O' ouvert de $\mathbf{R}^m$ il existe un ouvert O de $\mathbf{R}^n$ tel que $f^{-1}(O') = X \cap O$.*

Proposition 2.43 *Soit $X \subset \mathbf{R}^n$ et $f : X \to \mathbf{R}^m$. L'application f est continue si et seulement si pour tout F' fermé de $\mathbf{R}^m$ il existe un fermé F de $\mathbf{R}^n$ tel que $f^{-1}(F') = X \cap F$.*

Proposition 2.44 *Soit $X \subset \mathbf{R}^n$, $Y \in\subset \mathbf{R}^m$, $f : X \to Y$, $g : Y \to \mathbf{R}^p$ et $a \in X$. Si f est continue en a et g en $f(a)$ alors la composée $g \circ f$ est continue en a.*

Proposition 2.45 *Soit $X \subset \mathbf{R}^n$, $Y \in\subset \mathbf{R}^m$, $f : X \to Y$ et $g : Y \to \mathbf{R}^p$. Si f et g sont continues alors la composée $g \circ f$ l'est aussi.*

Proposition 2.46 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. La réciproque d'une bijection continue de U dans U est continue.*

Proposition 2.47 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. L'ensemble des applications continues et bijectives de U dans U, muni de la loi de composition des applications, est un groupe, non commutatif si $n \neq 0$.*

Remarque 2.5 Dans cette proposition il est important que U soit un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Exemples 2.8 • (contre-exemple) Soit $X = \cup_{n \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}} X_n \subset \mathbf{R}^2$ où

- $X_n = \{n\} \times]0, 1[$ si $n \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$,

- $X_n = \{(ny, y) | y \in]0, 1[\}$ si $n \in \mathbf{N}$,

- $X_\infty = \mathbf{R}^+ \times \{0\}$.

Soit $f : X \to X$ définie par

- $f(n, y) = (n + 1, y)$ si $n \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ et $y \in]0, 1[$,

- $f(ny, y) = ((n + 1)y, y)$ si $n \in \mathbf{N}$ et $y \in]0, 1[$,

- $f(x, 0) = (x, 0)$ si $x \in \mathbf{R}^+$.

L'application f est continue et bijective mais sa réciproque n'est pas continue.

• (un second contre-exemple) Soit $X = \{(2^n - 1)4^{nm} | n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z}\} \cup \{0\}$ et $f : X \to X$ définie par $f((2^n - 1)4^{nm}) = (2^n - 1)4^{n(m-1)}$ si $n \in \mathbf{N}$ et $m \in \mathbf{Z}$ et $f(0) = 0$. L'application f est continue et bijective mais sa réciproque n'est pas continue.

2.4 Compacité

Définition 2.18 Un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ est borné s'il est inclus dans la boule fermée $\overline{B}_n(0, R)$ pour un certain R.

Proposition 2.48 *Un sous-ensemble E de $\mathbf{R}^n$ est borné si et seulement si toute suite à valeurs dans E est bornée.*

Proposition 2.49 *La réunion de deux sous-ensembles bornés de $\mathbf{R}^n$ est un sous-ensemble borné de $\mathbf{R}^n$. L'intersection d'une famille de sous-ensembles bornés de $\mathbf{R}^n$ est un sous-ensemble borné de $\mathbf{R}^n$, que la famille soit finie ou infinie.*

Proposition 2.50 *Si K est un sous-ensemble borné de $\mathbf{R}^n$ et K' un sous-ensemble borné de $\mathbf{R}^{n'}$ alors $K \times K'$ est un sous-ensemble borné de $\mathbf{R}^{n+n'}$.*

Définition 2.19 Un sous-ensemble K de $\mathbf{R}^n$ est compact si quelle que soit la famille $(O_i)_{i \in I}$ d'ouverts de $\mathbf{R}^n$ telle que

$$K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$$

il existe un sous-ensemble fini J de I tel que

$$K \subset \bigcup_{i \in I} O_i.$$

En d'autres termes, un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ est compact si de tout recouvrement de par des ouverts on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

Théorème 2.2 *Un sous-ensemble K de $\mathbf{R}^n$ est compact si et seulement s'il est fermé et borné.*

Proposition 2.51 *Un sous-ensemble K de $\mathbf{R}^n$ est compact si et seulement si toute suite à valeurs dans K est bornée et possède une suite extraite convergente de limite dans K.*

Proposition 2.52 *La réunion de deux compacts de $\mathbf{R}^n$ est un compact de $\mathbf{R}^n$. L'intersection d'une famille de compacts de $\mathbf{R}^n$ est un compact de $\mathbf{R}^n$, que la famille soit finie ou infinie.*

Proposition 2.53 *Si K est un compact de $\mathbf{R}^n$ et K' un compact de $\mathbf{R}^{n'}$ alors $K \times K'$ est un compact de $\mathbf{R}^{n+n'}$.*

Proposition 2.54 *Soit $X \subset \mathbf{R}^n$ et $f : X \to \mathbf{R}^m$ continue. L'image $f(K)$ d'un compact K inclus dans X est un compact de $\mathbf{R}^m$.*

Définition 2.20 Soit $X \subset \mathbf{R}^n$. Une application $f : X \to \mathbf{R}^m$ est dite uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall (x, x') \in X^2\ ||x - x'|| < \eta \Longrightarrow ||f(x) - f(x')|| < \varepsilon.$$

Théorème 2.3 *(de Heine) Soit $X \subset \mathbf{R}^n$ et $f : X \to \mathbf{R}^m$ continue. Si X est compact alors f est uniformément continue.*

2.5 Connexité

Définition 2.21 Un sous-ensemble C de $\mathbf{R}^n$ est connexe si, quel que soit le couple (O_1, O_2) d'ouverts disjoints de $\mathbf{R}^n$ dont la réunion contient C, l'un ou l'autre contient ce sous-ensemble : $C \subset O_1$ ou $C \subset O_2$.

Exemples 2.9 • Le vide et $\mathbf{R}^n$ sont connexes.

• les sous-espaces affines de $\mathbf{R}^n$ sont connexes.

• Les boules ouvertes et les boules fermées sont connexes.

• Le produit $\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$ et le produit $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ avec $a_1 \leq b_1$,...,$a_n \leq b_n$ sont des connexes de $\mathbf{R}^n$.

• Les convexes sont connexes.

Proposition 2.55 *Les sous-ensembles connexes de* $\mathbf{R}$ *sont les intervalles de* $\mathbf{R}$.

Proposition 2.56 • *La réunion de deux sous-ensembles connexes de* $\mathbf{R}^n$ *dont l'intersection est non vide est connexe.*

Exemples 2.10 • Le sous-ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | \max(|x|, |y|) = 1\}$$

est un sous ensemble connexe de $\mathbf{R}^2$.

• Si $a_0, ..., a_d \in \mathbf{R}^n$ alors la ligne polygonale

$$\bigcup_{k=1}^{d} [a_{k-1}, a_k]$$

est connexe.

• La réunion

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \overline{B}_n((2k, 0, ..., 0), 1)$$

des boules fermées de centres les $(k, 0, ..., 0) \in \mathbf{R}^n$ avec $k \in \mathbf{Z}$ et de rayon égal à 1 est un sous-ensemble connexe de $\mathbf{R}^n$.

Proposition 2.57 *Soit* $X \subset \mathbf{R}^n$ *et* $f : X \to \mathbf{R}^m$ *continue. L'image* $f(C)$ *d'un sous-ensemble connexe* C *de* $\mathbf{R}^n$ *inclus dans* X *est un sous-ensemble connexe de* $\mathbf{R}^m$.

Exemple 2.11 Le graphe d'une application continue définie sur un sous-ensemble connexe de $\mathbf{R}^n$ est connexe.

Définition 2.22 Un sous-ensemble A de $\mathbf{R}^n$ est dit connexe par arcs si quel que soit $(a_0, a_1) \in A$ il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^n$ telle que $\gamma(0) = a_0$, $\gamma(1) = a_1$ et $\gamma([0,1] \subset A$.

Proposition 2.58 *Si un sous-ensemble A de $\mathbf{R}^n$ est connexe par arc alors il est connexe.*

Exemple 2.12 (contre-exemple) Le peigne C de $\mathbf{R}^2$ défini par

$$C = \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{R} \times \{\frac{1}{2^n}\} \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{n\} \times [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}] \right)$$

est connexe mais pas connexe par arcs.

3 Calcul différentiel

3.1 Différentiabilité des fonctions numériques

Dans cette partie la différentiabilité des fonctions numériques, d'une puis de plusieurs variables réelles, est étudiée.

Définition 3.1 Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in I$ et $l \in \mathbf{R}$. On dit que f admet l comme nombre dérivé en a si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \eta > 0 \, \forall x \in I \backslash \{a\} \, (|x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-f(a)-l \times (x-a)| < \eta \times |x-a|).$$

Remarque 3.1 Cette définition de nombre dérivé est équivalente à celle qui consiste à dire que c'est la limite du taux d'accroissement de f en a lorsque cette limite existe :

$$l = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Proposition 3.1 *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in I$. Si f admet un nombre dérivé en a, ce nombre dérivé est unique.*

Notation 3.1 Le nombre dérivé d'une fonction numérique de la variable réelle f en un réel a est noté $f'(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}(a)$ si f dépend de la variable x.

Définition 3.2 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}$, $a \in U$ et $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une forme linéaire. On dit que f admet L comme différentielle en a si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in U \; (||x-a|| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a) - L(x-a)| < \eta \times ||x-a||).$$

Définition 3.3 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}$ et $a \in U$. On dit que f est différentiable en a si f admet une différentielle en a.

Définition 3.4 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}$. On dit que f est différentiable si elle est différentiable en tout point de U.

Proposition 3.2 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}$. L'application f est continue en tout point où elle admet une différentielle.*

Proposition 3.3 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}$ et $a \in U$. Si f admet une différentielle en a, cette différentielle est unique.*

Notations 3.2 • La forme linéaire i^{e} coordonnée qui à $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ associe x_i est notée dx_i.

• Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}$, $a \in U$ et $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une forme linéaire. Si L est la différentielle de f en a on la note df_a ou $df(a)$. Il existe $L_1, ..., L_n \in \mathbf{R}$ tels que si $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ alors

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i x_i$$

c'est à dire

$$df_a = \sum_{i=1}^{n} L_i dx_i.$$

Exemples 3.1 • Une forme linéaire est elle-même sa différentielle en tout point.

• Si $a, b, c \in \mathbf{R}$ alors l'application définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ admet comme différentielle à l'origine la forme nulle.

Proposition 3.4 *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in U$. L'application f admet comme nombre dérivé en a de réel $f'(a)$ si et seulement si f admet comme différentielle en a l'application linéaire df_a qui à $t \in \mathbf{R}$ associe $df_a(t) = f'(a) \times t$.*

Définition 3.5 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}$, $a \in U$ de coordonnées $a_1, ..., a_n$ et $i \in \{1, ..., n\}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$\{(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n) | t \in]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[\}$$

est inclus dans U. Alors, s'il existe, le nombre dérivé en a de l'application qui à $t \in]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[$ associe $f(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n)$ s'appelle dérivée partielle de f en a par rapport à la i$^{\text{e}}$ coordonnée et est noté $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Proposition 3.5 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}$ et $a \in U$. Si f admet $df_a = \sum_{i=1}^{n} L_i dx_i$ comme différentielle en a alors pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ le nombre L_i est égal à $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, la dérivée partielle de f par rapport à la i^{e} coordonnée.*

Corollaire 3.1 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}$ et $a \in U$. La différentielle df_a, lorsqu'elle existe, vérifie*

$$df_a = df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

où les $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i \in \{1, ..., n\}$ sont les dérivées partielles de f en a.

Proposition 3.6 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}$ et $a \in U$. Si f et g admettent df_a et df_g comme différentielles en a alors $f + g$ admet $df_a + dg_a$ comme différentielle en a.*

Proposition 3.7 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}$ et $a \in U$. Si f et g admettent df_a et df_g comme différentielles en a alors $f \times g$ admet $g(a) \times df_a + f(a) \times dg_a$ comme différentielle en a.*

Proposition 3.8 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $a \in U$. L'ensemble des fonctions différentiables en a, muni des lois internes $+$ et x et de la multiplication par un scalaire, est une algèbre commutative.*

Proposition 3.9 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. L'ensemble des fonctions différentiables, muni des lois internes $+$ et x et de la multiplication par un scalaire, est une algèbre commutative.*

Proposition 3.10 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}$ et $a \in U$. Si f et g admettent df_a et df_g comme différentielles en a alors $f \times g$ admet $g(a) \times df_a + f(a) \times dg_a$ comme différentielle en a.*

Proposition 3.11 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, I un intervalle de $\mathbf{R}$, $f : U \to I$, $g : I \to \mathbf{R}$ et $a \in U$. Si f admet df_a comme différentielle en a et g admet comme* *nombre dérivé $g'(f(a))$ en $f(a)$ alors $g \circ f$ admet $g'(f(a)) \times df_a$ comme différentielle en a.*

Corollaire 3.2 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$ et $a \in U$. Si f admet df_a comme différentielle en a alors $\dfrac{1}{f}$ admet $\dfrac{1}{f(a)^2} \times df_a$ comme différentielle en a.*

3.2 Différentiabilité des applications vectorielles

Dans cette partie les applications étudiées sont des fonctions vectorielles de plusieurs variables réelles.

Définition 3.6 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f = (f_1, ..., f_m) : U \to \mathbf{R}^m$ et $a \in U$. On dit que f admet une différentielle en a si chaque fonction coordonnée f_i, $i \in \{1, ..., m\}$ admet une différentielle $df_i(a)$ en a. Dans ce cas l'application linéaire $(df_1(a), ..., df_m(a))$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ s'appelle différentielle de f en a. Elle est notée df_a ou $df(a)$.

Définition 3.7 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}^m$ et $a \in U$. On dit que f est différentiable en a si elle admet une différentielle en a.

Proposition 3.12 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}^m$, $a \in U$ et $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une application linéaire. Alors f admet L comme différentielle en a si la propriété suivante est vérifiée :*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in U \; (||x - a|| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a) - L(x - a)| < \eta \times ||x - a||).$$

Proposition 3.13 *La différentielle d'une application en un point, lorsqu'elle existe, est unique.*

Définition 3.8 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^m$. On dit que f est différentiable si elle admet une différentielle en tout point a de U.

Notation 3.3 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $a \in U$ et $f = (f_1, ..., f_m) : U \to \mathbf{R}^m$ différentiable en a. Si $i \in \{1, ..., n\}$ la dérivée partielle de f en a par rapport à la i$^{\text{e}}$ coordonnée est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a)\right).$$

Définition 3.9 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^m$. Si l'application f est différentiable en tout point de U alors l'application df qui à $a \in U$ associe la différentielle df_a de f en a s'appelle différentielle de f et pour $i \in \{1, ..., n\}$ l'application $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ qui à $a \in U$ associe la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ de f en a s'appelle dérivée partielle de f par rapport à la i$^{\text{e}}$ coordonnée.

Définition 3.10 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^m$. L'application f est dite continûment différentiable si elle est différentiable et si ses dérivées partielles sont continues.

Proposition 3.14 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}^m$, $g : U \to \mathbf{R}^m$ et $a \in U$. Si f et g admettent df_a et df_g comme différentielles en a alors $f + g$ admet $df_a + dg_a$ comme différentielle en a.*

Proposition 3.15 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $a \in U$. L'ensemble des applications de U dans $\mathbf{R}^m$ et différentiables en a est un sous-espace vectoriel de $((\mathbf{R}^m)^U, +, \cdot)$.*

Proposition 3.16 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. L'ensemble des applications différentiables de U dans $\mathbf{R}^m$ est un sous-espace vectoriel de $((\mathbf{R}^m)^U, +, \cdot)$.*

Proposition 3.17 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}^m$ et $a \in U$. Si f et g admettent df_a et df_g comme différentielles en a alors $f \times g$ admet $df_a \times g(a) + f(a) \times dg_a$ comme différentielle en a.*

Proposition 3.18 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, V un ouvert de $\mathbf{R}^m$, $f : U \to V$, $g : V \to \mathbf{R}^p$ et $a \in U$. Si f admet df_a comme différentielle en a et g admet $dg_{f(a)}$ comme différentielle en $f(a)$ alors $g \circ f$ admet $dg_{f(a)} \circ df_a$ comme différentielle en a.*

Définition 3.11 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^m$ une application de classe C^k avec $k \geq 0$ Un point a de U est dit point régulier de f si le rang de la différentielle df_a est maximal, c'est à dire égal à $\min(n, m)$. L'application f est dite régulière si tout point de U est un point régulier de f. Un point a de U est dit point singulier de f si ce n'est pas un point régulier de f. Les valeurs singulières de f sont les images par f de ses points singuliers. Le lieu singulier de f est l'ensemble de ses points singuliers.

Exemples 3.2 • Les points singuliers de $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(t) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ sont 0 et 1 et ses valeurs singulières sont $f(0) = 5$ et $f(1) = 4$. On peut noter que $5 = f(\frac{3}{2})$ et que $\frac{3}{2}$ est un point régulier de f.

• L'origine $(0, 0)$ est l'unique point singulier de $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = x^n + \lambda y^m$ avec $\lambda \in \mathbf{R}^*$ et $n, m \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$. La seule valeur singulière de f est donc $f(0, 0) = 0$.

• Les points des axes Ox et Oy sont les points singuliers de l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^n, y^m)$ avec $n, m \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$. Le rang de df_0 est 0 et en $a \in (Ox \cup Oy) \setminus \{a\}$ le rang de df_a est 1. L'ensemble des valeurs singulières est $(\{0\} \times A) \cup (B \times \{0\})$ avec $A = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^+$ suivant que m est impair ou pair et $B = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^+$ suivant que n est impair ou pair.

• Les points singuliers de $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(t) = (\sin^2(t) - 3\cos(t), \sin^3(t))$ sont les multiples de π et ses valeurs singulières sont $(-3, 0)$ et $(3, 0)$.

3.3 Différentiabilité d'ordre supérieur

Définition 3.12 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. On définit par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ de la façon suivante les applications de classe C^k de U dans $\mathbf{R}^m$:

- les applications de classe C^0 de U dans $\mathbf{R}^m$ sont les applications continues de U dans $\mathbf{R}^m$,

- si $k \in \mathbf{N}$, les applications de classe C^{k+1} de U dans $\mathbf{R}^m$ sont les applications différentiables de U dans $\mathbf{R}^m$ dont les dérivées partielles sont des applications différentiables de classe C^k de U dans $\mathbf{R}$.

Remarque 3.2 Si U est un ouverte de $\mathbf{R}^n$ les applications de classe C^1 de U dans $\mathbf{R}^m$ sont les applications continûment différentiables de U dans $\mathbf{R}^m$.

Notation 3.4 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $a \in U$, $f : U \to \mathbf{R}^m$ de classe C^k, $d \in \{1, ..., k\}$ et $(i_1, ..., i_d) \in \{1, ..., n\}^d$. On pose

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\ldots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_d}}\right)\right)(a) = \frac{\partial^d f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_d}}(a).$$

Définition 3.13 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Une application de U dans $\mathbf{R}^m$ est de classe C^∞ si elle est de classe C^k quel que soit $k \in \mathbf{N}$.

Exemples 3.3 • Les fonctions polynomiales d'une ou plusieurs variables sont de de classe C^∞.

• Les fonctions rationnelles d'une ou plusieurs variables sont de de classe C^∞.

• L'exponentielle, le logarithme, les fonctions trigonométriques et leurs réciproques, les fonctions trigonométriques hyperboliques et leurs réciproques sont de classe C^∞.

• Si $k \in \mathbf{N}$ la fonction qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $|x| \times x^k$ est de classe C^k mais pas de classe C^{k+1}.

Théorème 3.1 *(théorème de Schwarz) Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbf{R}^m$ de classe C^2. Alors pour tout $(i,j) \in \{1, ..., n\}^2$*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Notation 3.5 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $a \in U$, $f : U \to \mathbf{R}^m$ de classe C^k, $d \in \{1, ..., k\}$ et $i = (i_1, ..., i_n) \in \mathbf{N}^n$ tel que $|i| = i_1 + ... + i_n = d$. On note $\dfrac{\partial^d f}{\partial x_1^{i_1} ... \partial x_n^{i_n}}(a)$ la dérivée partielle d'ordre d de f en a obtenue en dérivant f successivement i_n fois par rapport à la dernière variable,..., i_j fois par rapport à la j$^{\text{e}}$ variable,..., i_1 fois par rapport à la première variable.

Remarque 3.3 Dans le calcul de $\dfrac{\partial^d f}{\partial x_1^{i_1} ... \partial x_n^{i_n}}(a)$, d'après Schwarz, on peut permuter l'ordre de dérivation.

Proposition 3.19 *Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, l'ensemble des applications de classe C^k de U dans $\mathbf{R}^m$ avec $k \geq 0$ est un sous-espace vectoriel de $((\mathbf{R}^m)^U, +, \cdot)$.*

Proposition 3.20 *Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, le quadruplet $(C^k(U, \mathbf{R}), +, \cdot, \times)$ avec $k \geq 0$ est une algèbre commutative.*

Proposition 3.21 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, V un ouvert de $\mathbf{R}^m$, $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbf{R}^p$. Si f et g sont de classe C^k avec $k \geq 0$ alors la composée $g \circ f$ l'est aussi.*

Proposition 3.22 *(inégalité de Taylor-Young) Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}^m$ une application de classe C^k avec $k \in \mathbf{N}^*$ et $a \in U$. Si $\varepsilon > 0$ il existe*

$\eta > 0$ tel que pour tout $x \in U$ vérifiant $||x - a|| < \eta$ on a

$$\left\| f(x) - \left(f(a) + \sum_{d=1}^{k} \frac{1}{d!} \sum_{\substack{i=(i_1,...,i_n)\in\mathbf{N}^n \\ |i|=i_1+...+i_n=d}} \frac{\partial^d f}{\partial x_1^{i_1}...x_n^{i_n}}(a) \prod_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^{i_j} \right) \right\| < \varepsilon \times ||x||^k.$$

Définition 3.14 Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}^m$ une application de classe C^k avec $k \geq 0$, $a \in U$ et $d \in \mathbf{N}$ vérifiant $d \leq k$. Si

$$\frac{\partial^d f}{\partial x_1^{i_1}...x_n^{i_n}}(a) = 0$$

pour tout $i = (i_1, ..., i_n) \in \mathbf{N}^n$ tel que $|i| = i_1 + ... + i_n \leq d$ on dit que l'application f est nulle en a à l'ordre au moins d.

Proposition 3.23 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}^m$ une application de classe C^k avec $k \geq 0$, $a \in U$ et $d \in \mathbf{N}$ vérifiant $d \leq k$. L'application f est nulle en a à l'ordre au moins d si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in U$ vérifiant $||x - a|| < \eta$ on a*

$$||f(x)|| < \varepsilon \times ||x||^d.$$

Proposition 3.24 *Soit U, V et W des ouverts respectivement de $\mathbf{R}^n$, de $\mathbf{R}^m$ et de $\mathbf{R}^l$, $f : U \to V$, $g : V \to W$, $h : W \to \mathbf{R}^p$ des applications de classe C^k avec $k \geq 0$, $a \in U$, $b = f(a)$ et $d \in \mathbf{N}$ vérifiant $d \leq k$. Si g est nulle en b à l'ordre au moins d en b alors $h \circ g \circ f$ est une application de classe C^k nulle en a à l'ordre au moins d.*

4 Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites

4.1 Théorème d'inversion locale

Théorème 4.1 *Soit f une application continûment différentiable (respectivement de classe C^k avec $k \geq 1$) d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ et soit $a \in U$. Si la différentielle $df(a)$ est inversible, c'est à dire si a un un point régulier de f, alors il existe un ouvert U' de $\mathbf{R}^n$ contenant a et inclus dans U tel que $f(U')$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, l'application $g : U' \to f(U')$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in U'$ est une bijection et sa réciproque $g^{-1} : f(U') \to U'$ est une application continûment différentiable (respectivement de classe C^k avec $k \geq 0$).*

Remarque 4.1 Ce théorème généralise ce qui est connu pour les applications affines entre deux espaces affines de même dimension finie.

Exemple 4.1 (pour comprendre les limites du théorème) Soit $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ si $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{O\}$. C'est une fonction de classe C^∞ et en tout point $a \in \mathbf{R}^2 \setminus \{O\}$ la différentielle $df(a)$ est inversible. On est donc dans le cadre des hypothèses du théorème. On peut observer que f n'est pas injective et que tout point de $\mathbf{R}^2 \setminus \{O\}$ admet exactement deux antécédents par f. Une étude géométrique de f permet d'établir que f multiplie par 2 les angles par rapport à la demi-droite Ox et élève au carré la distance à l'origine.

Corollaire 4.1 *Soit f_1 et f_2 deux applications continûment différentiables (respectivement de classe C^k avec $k \geq 1$) d'un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ et à valeurs pour la première dans $\mathbf{R}^p$ et pour la seconde dans $\mathbf{R}^q$ et soit $a \in U$. On pose $f = (f_1, f_2)$: c'est l'application continûment différentiable de U dans $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ dont les p*

premières fonctions coordonnées sont les fonctions coordonnées de f_1 et les q dernières sont les fonctions coordonnées de f_2. Si la différentielle $df_1(a)$ est inversible, c'est à dire si a un un point régulier de f_1, alors il existe un ouvert U' de $\mathbf{R}^p$, contenant a et inclus dans U tel que $f_1(U')$ est un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et il existe une application continûment différentiable (respectivement de classe C^k avec $k \geq 0$) h de $f_1(U')$ dans $\mathbf{R}^q$ dont le graphe est $f(U')$.

4.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 4.2 *Soit ϕ une application continûment différentiable d'un ouvert U de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^q$ et soit $a \in U$. On note F l'application de U dans $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ définie de la façon suivante : si $x = (x', x'') \in U$ avec $x' \in \mathbf{R}^p$ et $x'' \in \mathbf{R}^q$ alors $F(x) = (x', \phi(x', x''))$. Si la différentielle partielle $d\phi_{0q}(a)$ de ϕ en a par rapport aux q dernières coordonnées est inversible alors il existe un ouvert U' de $\mathbf{R}^n$, contenant a et inclus dans U tel que $F(U')$ est un ouvert de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$, l'application $G : U' \to F(U')$ définie par $G(x) = F(x)$ si $x \in U'$ est une bijection et sa réciproque $G^{-1} : F(U') \to U'$ est une application continûment différentiable. Plus précisément il existe une application continûment différentiable ψ de $F(U')$ dans $\mathbf{R}^q$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $(x', x'') \in U'$ tel que $x' \in \mathbf{R}^p$ et $x'' \in \mathbf{R}^q$ et pour tout $(y', y'') \in F(U')$ tel que $y' \in \mathbf{R}^p$ et $y'' \in \mathbf{R}^q$ l'égalité $(y', y'') = (x', \phi(x', x''))$ est équivalente à l'égalité $(x', x'') = (y', \psi(y', y''))$.*

Remarque 4.2 Ce théorème généralise ce qui est connu pour les applications affines surjectives entre deux espaces affines dont les dimensions sont finies.

4.3 Difféomorphisme

Définitions 4.1 • Soit $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$ et $f : U \to V$. L'application f est homéomorphisme entre U et V si c'est bijection et si elle et sa réciproque sont continues.

• Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, V un ouvert de $\mathbf{R}^m$ et $f : U \to V$. L'application f est difféomorphisme de classe C^k avec $k \geq 1$ si c'est un homéomorphisme entre U et V et si elle et sa réciproque sont de classe C^k.

Proposition 4.1 *La composée d'homéomorphismes est un homéomorphisme. La composée de difféomorphismes de classe C^k avec $k \geq 1$ est un difféomorphisme de classe C^k.*

Proposition 4.2 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, V un ouvert de $\mathbf{R}^m$ et $f : U \to V$ une application de classe C^k avec $k \geq 1$ qui est bijective. Alors $m = n$. Si de plus en tout point $a \in U$ la différentielle df_a est inversible alors f est un difféomorphisme de classe C^k.*

Théorème 4.3 *(admis) Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, V un ouvert de $\mathbf{R}^m$ et $f : U \to V$. Si f est un homéomorphisme entre les ouverts U et V alors $m = n$.*

5 Sous-variété d'un espace affine réel de dimension finie.

5.1 Premiers exemples

Définition 5.1 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n et de direction E, $p \in \{0, ..., n\}$ et $k \geq 1$. Un sous-ensemble non vide V de $\mathcal{E}$ est une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathcal{E}$ si pour tout point a de V il existe une base b de E des ouverts U' et U'' respectivement de $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^{n-p}$ et une application

$f : U' \to U''$ de classe C^k tels que dans les coordonnées affines associées au repère affine (a, b) l'intersection $V \cap (U' \times U'')$ est égale au graphe de f.

Remarque 5.1 Dans la suite on considère que $\mathcal{E}$ est $\mathbf{R}^n$ vu comme espace affine de dimension n et donc sa direction E est $\mathbf{R}^n$ vu comme espace vectoriel.

Définitions 5.2 • Une sous-variété de dimension 1 est appelée courbe et une une sous-variété de dimension 2 est appelée surface.

• Une sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathbf{R}^n$ est appelée hypersurface.

Remarque 5.2 Soit V une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$ et $a \in V$. Une fois donnés b, U' et U'', l'application f de la proposition précédente est unique.

Exemples 5.1 • Un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$ est une sous-variété de dimension n et de classe C^∞ de $\mathbf{R}^n$.

• Un sous-espace affine de dimension p d'un espace affine de dimension n est une sous-variété de dimension p et de classe C^∞ de cet espace affine.

• Soit $p, q, n \in \mathbf{N}$ tels que $n = p + q$, U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^p$ et $f : U \to \mathbf{R}^q$ une application de classe C^k avec $k \geq 1$. Le graphe de f est une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$.

• Si $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$ et si $R > 0$ alors la sphère de centre a et de rayon R,

$$S_n(a, R) = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n | \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = R^2\},$$

est une sous-variété de dimension $n-1$ et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$.

Proposition 5.1 *Soit $f : U \to V$ un difféomorphisme de classe C^k avec $k \in \mathbf{N}^*$ et W une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ incluse dans U. Alors l'image $f(W)$ de W par f est* *une sous-variété de classe C^k et de même dimension que W.*

5.2 Sous-variété obtenue par submersion

Définition 5.3 Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$. Une application $f : U \to \mathbf{R}^q$ de classe C^k avec $k \geq 1$ est une submersion si en tout $a \in U$ la différentielle df_a est une application linéaire surjective.

Proposition 5.2 *Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^q$ une submersion de classe C^k avec $k \geq 1$. Alors $f^{-1}(0)$ est soit vide soit une sous-variété de dimension $p = n - q$ et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$.*

Exemple 5.2 Soit $f : \mathbf{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x^2 + (y-2)^2 + z^2 - 4, (y-1)^2 + z^2 - 1).$$

L'application f est une submersion de classe C^∞. Par conséquent

$$f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} | x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4, (y-1)^2 + z^2 = 1\}$$

qui est non vide est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbf{R}^3$.

5.3 Sous-variété obtenue par immersion

Définition 5.4 Soit W un ouvert non vide de $\mathbf{R}^p$. Une application $f : W \to \mathbf{R}^n$ de classe C^k avec $k \geq 1$ est une immersion si en tout point de W la différentielle de f est une application linéaire injective.

Proposition 5.3 *Un sous-ensemble non vide V de $\mathbf{R}^n$ est une sous-variété de dimension p et de classe C^k s'il vérifie la propriété suivante : pour tout $a \in V$ il* *existe un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ contenant a, un ouvert W de $\mathbf{R}^p$ et $f : W \to \mathbf{R}^n$ une immersion de classe C^k telle que $f(W) = V \cap U$.*

Exemples 5.3 • L'ensemble

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

des matrices de rotation de $\mathbf{R}^2$ est une sous-variété de dimension 1 de l'espace vectoriel de dimension 4 des matrices carrées $(2, 2)$ qui est l'image de $\mathbf{R}$ par l'immersion f définie par

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \text{ pour } t \in \mathbf{R}.$$

• L'application f de $\mathbf{R}\times]-1, 1[$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par

$$f(t, r) = (\cos(2t) \times (2 + r\cos(t)), \sin(2t) \times (2 + r\cos(t)), r\sin(t))$$

est une immersion de classe C^∞ et $V = f(\mathbf{R}\times]-1, 1[)$ est une sous-variété de dimension 2 et de classe C^∞ de $\mathbf{R}^3$.

Remarque 5.3 Dans les deux exemples précédents le fait que les ensembles considérés soient obtenus à partir d'immersion doit être complété pour établir en toute rigueur que ce sont des sous-variétés. Il s'agit de trouver, pour chaque point de la variété, l'ouvert indiqué dans la dernière proposition.

Exemple 5.4 Soit γ_R, $R \in \mathbf{R}^{+*}$ la famille d'applications de classe C^∞ définies par $\gamma_R(t) = (\cos(t), R\sin(t) - \tan(t))$. Si $R \in]0, 1[$, l'application γ_R est une immersion injective. L'application γ_1 est injective mais ce n'est pas une immersion car

$\gamma_1'(0) = 0$ et le phénomène qu'on observe en $R = 1$ est l'existence d'une cuspide. Si $R \in]1, +\infty)$, l'application γ_R est une immersion non injective : il existe $t_R \neq 0$ tel que $\gamma_R(t_R) = \gamma_R(-t_R)$ et γ_R en restriction à $\mathbf{R} \setminus \{\pm t_R\}$ est injective.

Définitions 5.5 • Soit V une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$, W un ouvert non vide de $\mathbf{R}^p$ et $f : W \to \mathbf{R}^n$ une application de classe C^k avec $k \geq 1$. L'application f est appelée paramétrisation locale de V si c'est une immersion injective qui vérifie $f(W) \subset V$.

• Soit V une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$. Un atlas de paramétrisations locales de V est la donnée d'une famille indexée de paramétrisations locales de V, $f_i : W_i \to \mathbf{R}^n$, $i \in I$, telle que $V = \cup_{i \in I} f_i(W_i)$.

Proposition 5.4 *Si V est une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$ elle possède un atlas de paramétrisations locales.*

5.4 Sous-espace tangent à une sous-variété en un point

Définition 5.6 Soit V une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$ et $a \in V$. Soit une base b de $\mathbf{R}^n$ des ouverts U' et U'' respectivement de $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^{n-p}$ et une application $f : U' \to U''$ de classe C^k tels que dans les coordonnées associées au repère affine (a, b) l'intersection $V \cap (U' \times U'')$ est égale au graphe de f. Soit L l'application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ définie par $L(u) = (u, df_0(u))$. Le sous-ensemble $\mathrm{Im}(L) = L(\mathbf{R}^p)$ est un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbf{R}^n$. Le sous-espace vectoriel T_aV de E de dimension p formé des vecteurs dont les coordonnées dans la base b sont les éléments de $\mathrm{Im}(L) = L(\mathbf{R}^p)$ est appelé sous-espace tangent à V en a.

Définition 5.7 Soit V une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$ et $a \in V$. Les vecteurs de T_aV sont appelés vecteurs tangents à V en a.

Proposition 5.5 *Une sous-variété V de dimension p et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$ admet, en chacun de ses points, un unique sous-espace tangent.*

Proposition 5.6 *(variante) Dans la définition précédente, T_aV ne dépend pas du choix de b, U', U'' et f.*

Définition 5.8 Soit V une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$ et $a \in V$. Le sous-espace affine tangent à V en a est le sous-espace affine $a + T_aV$ où T_aV désigne le sous-espace tangent à V en a.

Exemple 5.5 • Si $f : I \to \mathbf{R}^n$ est une application de classe C^k alors la droite vectorielle dirigée par $(1, f'(a))$ est le sous-espace tangent au graphe de f en $(a, f(a))$ et la droite affine dirigée par cette droite vectorielle et qui passe par $(a, f(a))$ est la droite affine tangente au graphe de f en $(a, f(a))$.
• Si $b = (b_1, ..., b_n)$ appartient à la sphère $S_n(a, R)$ avec $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$ et si $R > 0$ alors le sous-espace affine tangent à $S_R(a)$ en b est l'hyperplan

$$T_b(S_n(a, R)) = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n | \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)x_i = 0\}.$$

Proposition 5.7 *Soit V une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$, W une sous-variété de dimension q et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$ et soit $a \in V$. Si $a \in W \subset V$ alors $T_aW \subset T_aV$.*

Définition 5.9 Soit V une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$. Alors l'ensemble formé des (a, T_aV) avec $a \in V$ est un sous-ensemble TV de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ appelé fibré tangent à V.

Proposition 5.8 *Le fibré tangent d'une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$ est une sous-variété de dimension $2p$ et de classe C^{k-1} de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.*

Exemple 5.6 Le fibré tangent du cercle unité $C = \{x^2 + y^2\}$ de $\mathbf{R}^2$ est la surface TC de $\mathbf{R}^4$ donnée par

$$\{(x, y, u, v) \in \mathbf{R}^4 | x^2 + y^2 = 1, xu + yv = 0\}.$$

Proposition 5.9 *Soit $f : U \to V$ un difféomorphisme de classe C^k avec $k \geq 1$ et W une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ incluse dans U. Alors si $a \in W$ l'image $df_a(T_a W)$ par df_a du sous-espace tangent $T_a W$ de W en a est le sous-espace tangent à la sous-variété $f(W)$ en $f(a)$:*

$$T_{f(a)} f(W) = df_a(T_a W).$$

Proposition 5.10 *Soit V une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$ avec $k \geq 1$, U un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et $f : U \to \mathbf{R}^n$ une immersion injective et de classe C^k telle que $f(U) \subset V$. Alors si $a \in U$ et $b = f(a) \in V$ l'image $\mathrm{Im}(df_a) = df_a(\mathbf{R}^p)$ de $\mathbf{R}^p$ par par df_a est le sous-espace tangent $T_b V$ à la sous-variété V en b :*

$$T_b V = \mathrm{Im}(df_a) = df_a(\mathbf{R}^p).$$

5.5 Orientation des sous-variétés

Définitions 5.10 • Soit V une sous-variété de dimension p et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$ et $f_i : W_i \to \mathbf{R}^n$, $i \in I$ un atlas de paramétrisations locales de V. Cet atlas est dit orienté si quels que soient $i, j \in I$, $p_i \in W_i$, $p_j \in W_j$ et $a \in V$ tel que $a = f_i(p_i) = f_j(p_j)$ les images de la base canonique de $\mathbf{R}^p$ par $df_i(p_i)$ et $df_j(p_j)$ définissent la même orientation de $T_a V$.

• Une sous-variété V de dimension p et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$ est dite orientable si elle possède un atlas orienté.

Exemples 5.7 • Une sphère est orientable.

• Le ruban de Moëbius n'est pas orientable.

Proposition 5.11 *Soit $k \geq 1$, U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}$ une submersion de classe C^k. Alors $f^{-1}(\lambda)$ est une une sous-variété orientable de $\mathbf{R}^n$ si $\lambda \in f(U)$.*

Proposition 5.12 *Une hypersurface fermée de $\mathbf{R}^n$ est toujours orientable.*

Deuxième partie

Courbes et surfaces

Dans cette partie $\mathbf{R}^n$ est considéré comme un espace affine euclidien orienté ou comme un espace vectoriel euclidien orienté et la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est considérée comme une base orthonormale directe.

6 Courbes

6.1 Définitions, premiers exemples

Définition 6.1 Une courbe paramétrée γ de $\mathbf{R}^n$ est une application continue γ définie sur un intervalle non vide I de $\mathbf{R}$: $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$. Si γ est une application de classe C^k avec $k \geq 0$ la courbe paramétrée est dite de classe C^k. L'application γ est aussi appelée paramétrisation de classe C^k du sous-ensemble $\gamma(I)$ de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 6.1 Une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ peut-être aussi appelée arc paramétré. Si I est un segment $[\alpha, \beta]$ on parle de chemin et de lacet si de plus $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

Remarque 6.2 (interprétation physique) Une courbe paramétrée peut être vue comme la fonction position d'un point matériel en fonction du temps t (en particulier lorsque $n = 1, 2, 3$).

Exemples 6.1 • Soit δ une droite de $\mathbf{R}^2$ passant par $a = (x_a, y_a)$ et $b = (x_b, y_b)$ qui sont supposés distincts. Cette droite est l'image de la courbe paramétrée de classe C^∞ γ qui à $t \in \mathbf{R}$ associe $\gamma(t) = ((1-t)x_a + tx_b, (1-t)y_a + ty_b) \in \mathbf{R}^2$. On remarque que si $t \in \mathbf{R}$ alors $\gamma(t) = a + t\overrightarrow{ab}$ est l'image du point a par la translation de vecteur $t\overrightarrow{ab}$.

• Le segment $[a, b]$ passant par deux points a et b de $\mathbf{R}^n$ est l'image du chemin $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^n$ de classe C^∞ défini par $\gamma(t) = (1-t)a + tb$ si $t \in [0, 1]$.

• Le cercle unité de $\mathbf{R}^2$, $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ est l'image de la courbe paramétrée de classe C^∞ γ qui à $t \in \mathbf{R}$ associe $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbf{R}^2$.

• Le cercle unité de $\mathbf{R}^2$, $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ est aussi l'image du lacet $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ qui à $t \in \mathbf{R}$ associe $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in \mathbf{R}^2$.

• Si $f : I \to \mathbf{R}^n$ est une application de classe C^k avec $k \geq 0$ alors son graphe

$$\mathcal{G}_f = \{(t, f(t)) | t \in I\}$$

est l'image $\gamma(I)$ de la courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbf{R}^{n+1}$ de classe C^k définie par $\gamma(t) = (t, f(t))$ si $t \in I$.

• La courbe de Peano est une application continue et surjective de $[0, 1]$ dans $[0, 1]^2$.

Proposition 6.1 *Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ un lacet de classe C^k avec $k \geq 0$. Alors il existe une courbe paramétrée $\hat{\gamma} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ de classe C^k, périodique de période $l = b - a$ et qui coïncide avec γ sur $[a, b]$ si et seulement si $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ inférieur ou égal à k.*

Définition 6.2 Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^k avec $k \geq 0$, J un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\beta : J \to I$ un difféomorphisme de classe C^k. Alors $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \beta$ est une courbe paramétrée de classe C^k qui est dite C^k-équivalente à la courbe paramétrée γ.

Remarque 6.3 Si $\tilde{\gamma} : J \to \mathbf{R}^n$ est une courbe paramétrée C^k-équivalente à une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ alors $\tilde{\gamma}$ et γ sont deux paramétrisations du sous-ensemble Γ de $\mathbf{R}^n$ défini par $\Gamma = \gamma(I) = \tilde{\gamma}(J)$.

Proposition 6.2 *Si $k \geq 0$ être C^k-équivalente est une relation d'équivalence définie sur l'ensemble des courbes paramétrées de classe C^k. Les classes d'équivalence de cette relation s'appellent courbes (ou arcs) géométriques. Les courbes paramétrées définissant le même arc géométrique sont appelées courbes paramétrées admissibles de cet arc.*

Remarques 6.4 • Il existe des applications de classe C^k avec $k \geq 1$ entre deux intervalles non vides qui sont des bijections mais dont les réciproques sont seulement continues. C'est le cas de $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(t) = t^3$.

• Deux courbes paramétrées $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ et $\tilde{\gamma} : J \to \mathbf{R}$, toutes deux de classe C^k avec $k \geq 1$ peuvent être telles que $\gamma(I) = \tilde{\gamma}(J)$ sans qu'il existe un difféomorphisme $\beta : J \to I$ de classe C^k ou un difféomorphisme $\tilde{\beta} : I \to J$ de classe C^k. Un exemple (inspiré de l'exemple précédent) est donné par $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $\gamma(t) = (t+1)^3$ et $\tilde{\gamma} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $\gamma(t) = (t-1)^3$.

6.2 Tangence

Définition 6.3 Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^k avec $k \geq 1$. Le vecteur tangent à γ en t est le vecteur de $\mathbf{R}^n$ égal à $\gamma'(t)$.

Remarque 6.5 (interprétation physique) Le vecteur tangent $\gamma'(t)$ en t à une courbe paramétrée γ peut être vu comme la vitesse à l'instant t d'un point matériel dont la fonction position en fonction du temps t est cette courbe paramétrée. Si la courbe paramétrée est au moins de classe C^2 alors le vecteur $\gamma''(t)$ peut être vu comme l'accélération à l'instant t d'un point matériel dont la fonction position en fonction du temps t est cette courbe paramétrée.

Remarque 6.6 Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^k avec $k \geq 1$. Si γ n'est pas injective il peut exister $t_1 \neq t_2$ dans I tels que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ et $\gamma'(t_1) \neq \gamma'(t_2)$.

Définitions 6.4 • Une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ de classe C^k avec $k \geq 1$ est dite régulière si $\gamma'(t) \neq 0$ quel que soit $t \in I$.

• Si $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ est une courbe paramétrée régulière et si $t \in I$ alors la tangente en t à γ est la droite affine qui passe par $\gamma(t)$ et qui admet $\gamma'(t)$ comme vecteur directeur.

Exemple 6.2 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ est une application de classe C^k avec $k \geq 1$. Alors la tangente (au sens donné dans le cadre des études des fonctions numériques de la variable réelle) au graphe $\mathcal{G}_f$ au point $(t, f(t))$ avec $t \in I$ coïncide avec la tangente en t à la courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(s) = (s, f(s))$ si $s \in I$. C'est la droite

$$\{(t, f(t)) + s(1, f'(t)) | s \in \mathbf{R}\}$$

qui est aussi égale à

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | f'(t)(x - t) - (y - f(t)) = 0\}.$$

Proposition 6.3 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée régulière de classe C^k avec $k \geq 1$ et $t \in I$. Il existe un intervalle J inclus dans I et contenant t, il existe un ouvert U contenant $\gamma(t)$, il existe des coordonnées affines dans les quelles $\gamma(J) \cap U$ est le graphe d'une application de classe C^k définie sur un intervalle non vide et à valeurs dans $\mathbf{R}^{n-1}$.*

Remarque 6.7 Cette proposition signifie que si $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ est une courbe paramétrée régulière de classe C^k avec $k \geq 1$ et si $t \in I$ alors il existe un intervalle J inclus dans I et contenant t tel que $\gamma(J)$ est une sous-variété de dimension 1 et de classe C^k de $\mathbf{R}^n$.

Proposition 6.4 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée régulière de classe C^k, $\beta : J \to I$ un difféomorphisme de classe C^k, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \beta$, $s \in J$ et $t \in I$ tels que $t = \beta(s)$. Alors la tangente en t à γ et la tangente en s à $\tilde{\gamma}$ coïncident.*

Proposition 6.5 *Les courbes paramétrées C^k-équivalentes à une courbe paramétrée de classe C^k et régulière sont toutes régulières.*

Exemple 6.3 La courbe paramétrée $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ de classe C^∞ définie par $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ n'est régulière. Il n'existe donc aucune courbes paramétrée régulière qui lui soit C^∞ et même C^1-équivalente.

Proposition 6.6 *Les courbes paramétrées C^k-équivalentes à une courbe paramétrée de classe C^k et régulière sont toutes régulières.*

Proposition 6.7 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^k avec $k \geq 2$. On suppose que le déterminant de la famille $(\gamma'(t), \gamma''(t))$ relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^2$ est de signe constant. Alors si $t \in I$ il existe un intervalle J inclus dans I et contenant t, il existe un ouvert U contenant $\gamma(t)$, il existe des* *coordonnées affines dans les quelles $\gamma(J) \cap U$ est le graphe d'une application convexe de classe C^k définie sur un intervalle non vide et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.*

Définition 6.5 Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^k avec $k \geq 2$ et t dans I. On dit que la courbe paramétrée γ présente une inflexion en t si le déterminant de la famille $(\gamma'(s), \gamma''(s))$ relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^2$ change de signe en t.

Exemple 6.4 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^k avec $k \geq 2$. Alors l'arc $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ défini par $\gamma(t) = (t, f(t))$ présente une inflexion en t si la dérivée seconde de f change de signe en t.

Remarque 6.8 (Tracé de l'image d'une courbe paramétrée de $\mathbf{R}^2$) Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^k avec $k \geq 1$. Notons $t \in I \mapsto x(t)$ et $t \in I \mapsto y(t)$ les deux fonctions coordonnées de γ. Pour tracer $\gamma(I)$ on peut procéder de la façon suivante :

- réduction de I en fonction des symétries que vérifient les fonctions coordonnées,
- calcul des dérivées x' et y',
- étude de la régularité de γ,
- étude des variations de x et de y,
- étude du signe de $x' \times y'$ (égal à celui de $\frac{y'}{x'}(t)$ ou de $\frac{x'}{y'}(t)$),
- recherche des tangentes verticales (parmi les t tels que $x'(t) = 0$) et des tangentes horizontales (parmi les t tels que $y'(t) = 0$),
- limites de x et de y et éventuellement de $\frac{x}{y}$ et de $\frac{y}{x}$ aux bornes de I,

Ces éléments permettent de réaliser une première esquisse du tracé de $\gamma(I)$,

- étude de la convexité et des inflexions.

6.3 Longueur d'un arc de courbe paramétrée, abscisse curviligne

Définition 6.6 Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^k avec $k \geq 1$. Si $a, b \in I$ avec $a \leq b$ alors la longueur de courbe paramétrée γ entre a et b est l'intégrale $\mathrm{Longueur}(\gamma, a, b)$ définie par

$$\mathrm{Longueur}(\gamma, a, b) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt.$$

Remarque 6.9 Dans cette définition on choisit $a \leq b$ pour obtenir une longueur positive ou nulle mais on peut lever cette restriction.

Proposition 6.8 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^k avec $k \geq 1$, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une isométrie affine et $a, b \in I$ avec $a \leq b$. Alors* Longueur$(\gamma, a, b) =$ Longueur$(f \circ \gamma, a, b)$.

Proposition 6.9 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^k avec $k \geq 1$, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une homothétie affine de rapport λ et $a, b \in I$ avec $a \leq b$. Alors* $|\lambda| \times$ Longueur$(\gamma, a, b) =$ Longueur$(f \circ \gamma, a, b)$.

Proposition 6.10 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^k avec $k \geq 1$, $\beta : J \to I$ une bijection de classe C^k, $a, b \in I$ avec $a \leq b$ et $c, d \in J$ tels que $\beta(c) = a$ et $\beta(d) = b$. Alors* Longueur$(\gamma, a, b) = \pm$Longueur$(\gamma \circ \beta, c, d)$ *(le signe est positif si $c \leq d$).*

Exemples 6.5 • Soit $a = (a_1, ..., a_n)\mathbf{R}^n$, $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbf{R}^n$ et $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ défini par $\gamma(t) = (1 - t)a + tb$ si $t \in \mathbf{R}$. On suppose $a \neq b$ L'application affine γ est injective et c'est une courbe paramétrée de classe C^∞ dont l'image $\gamma(\mathbf{R})$ est la droite qui passe par $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$. Le segment $[a, b]$ est égal à $\gamma([0, 1])$. Si

$t \in \mathbf{R}$ alors

$$\gamma'(t) = (b_1 - a_1, ..., b_n - a_n)$$

et donc

$$||\gamma'(t) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2} = ||b - a||.$$

La longueur Longueur$(\gamma, 0, 1)$ est égale à

$$\begin{aligned}
\text{Longueur}(\gamma, 0, 1) &= \int_0^1 ||\gamma'(t)||dt \\
&= \int_0^1 ||b - a||dt \\
&= ||b - a||.
\end{aligned}$$

Ainsi la longueur d'un segment $[a, b]$ donnée par la formule intégrale précédente coïncide avec la distance euclidienne ente a et b. • Soit $\gamma : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, t^{\frac{3}{2}})$. Cette courbe paramétrée est C^∞ et vérifie

$$\gamma'(t) = (1, \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}) \text{ si } t \in \mathbf{R}^+.$$

Il vient donc

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{9}{4} t} \text{ si } t \in \mathbf{R}^+.$$

Par conséquent, si $b \in \mathbf{R}^+$ la longueur Longueur$(\gamma, 0, b)$ vaut

$$\begin{aligned}\text{Longueur}(\gamma, 0, b) &= \int_0^b ||\gamma'(t)||dt \\ &= \int_0^b \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}dt \\ &= \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^b \\ &= \frac{8}{27}\left(\left(1 + \frac{9}{4}b\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right).\end{aligned}$$

On obtient donc, en posant $b = 5$, Longueur$(\gamma, 0, 5) = \frac{335}{27}$.

• Soit $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ définie par $(\cos(t), \sin(t), \lambda t)$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$ fixé. Cette courbe paramétrée est C^∞ et vérifie

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), \lambda) \text{ si } t \in \mathbf{R}.$$

Il vient donc

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \lambda^2} \text{ si } t \in \mathbf{R}.$$

Par conséquent, si $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a \leq b$ la longueur Longueur(γ, a, b) vaut

$$\begin{aligned}\text{Longueur}(\gamma, a, b) &= \int_0^b ||\gamma'(t)||dt \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \lambda^2}dt \\ &= \sqrt{1 + \lambda^2}(b - a).\end{aligned}$$

• Soit $\lambda > 0$ et $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = \left(t, \dfrac{\cosh(\lambda t)}{\lambda}\right)$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. Cette courbe paramétrée est C^∞ et vérifie

$$\gamma'(t) = (1, \sinh(\lambda t)) \text{ si } t \in \mathbf{R}$$

et donc

$$\begin{aligned} ||\gamma'(t)|| &= \sqrt{1 + \sinh^2(\lambda t)} \\ &= \cosh(\lambda t). \end{aligned}$$

Par conséquent, si $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a \leq b$ la longueur Longueur(γ, a, b) vaut

$$\begin{aligned} \text{Longueur}(\gamma, a, b) &= \int_a^b ||\gamma'(t)|| dt \\ &= \int_a^b \cosh(\lambda t) dt \\ &= \frac{\sinh(b) - \sinh(a)}{\lambda}. \end{aligned}$$

• Soit $\gamma : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, \lambda t^2)$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. Cette courbe paramétrée est C^∞ et vérifie

$$\gamma'(t) = (1, 2\lambda t) \text{ si } t \in \mathbf{R}.$$

Il vient donc

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4\lambda^2 t^2} \text{ si } t \in \mathbf{R}.$$

Par conséquent, si $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a \leq b$ la longueur Longueur(γ, a, b) vaut

$$\begin{aligned} \text{Longueur}(\gamma, a, b) &= \int_a^b ||\gamma'(t)|| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + 4\lambda^2 t^2} dt. \end{aligned}$$

On pose $2\lambda t = \sinh(s)$ et donc $2\lambda t'(s) = \cosh(s)$ car $\sinh' = \cosh$. Il vient donc

$$\text{Longueur}(\gamma, a, b) = \int_{\text{asinh}(2\lambda a)}^{\text{asinh}(2\lambda b)} \sqrt{1+\sinh^2(s)}\frac{\cosh(s)}{2\lambda}ds.$$

En utilisant $\cosh(u) = \sqrt{1+\sinh^2(u)}$ on obtient alors

$$\text{Longueur}(\gamma, a, b) = \int_{\text{asinh}(2\lambda a)}^{\text{asinh}(2\lambda b)} \frac{\cosh^2(s)}{2\lambda}ds.$$

Puisque $\cosh^2(u) = \frac{\cosh(2u)}{2} + \frac{1}{2}$ et $\sinh' = \cosh$ il vient

$$\begin{aligned}\text{Longueur}(\gamma, a, b) &= \int_{\text{asinh}(2\lambda a)}^{\text{asinh}(2\lambda b)} \left(\frac{\cosh(2s)}{4\lambda} + \frac{1}{4\lambda}\right) ds \\ &= \left[\frac{\sinh(2s)}{8\lambda} + \frac{s}{4\lambda}\right]_{\text{asinh}(2\lambda a)}^{\text{asinh}(2\lambda b)}.\end{aligned}$$

Enfin, de $\sinh(2u) = 2\cosh(u)\sinh(u)$, on déduit

$$\begin{aligned}\text{Longueur}(\gamma, a, b) &= \left[\frac{\cosh(s)\sinh(s)}{4\lambda} + \frac{s}{4\lambda}\right]_{\text{asinh}(2\lambda a)}^{\text{asinh}(2\lambda b)} \\ &= \frac{\sqrt{1+(2\lambda b)^2}b - \sqrt{1+(2\lambda a)^2}a}{2} + \frac{\text{asinh}(2\lambda b) - \text{asinh}(2\lambda a)}{4\lambda}.\end{aligned}$$

Or $\text{asinh}(u) = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)$. Par conséquent, si $a = 0$, $b = 1$ il vient,

$$\text{Longueur}(\gamma, 0, 1) = \frac{\sqrt{1+4\lambda^2}}{2} + \frac{\ln\left(2\lambda + \sqrt{1+4\lambda^2}\right)}{4\lambda}.$$

Remarque 6.10 Avec la formule intégrale, le calcul de la longueur d'un arc de courbe est ramené à celui d'une primitive. Les deux s'avèrent donc aussi difficiles.

Théorème 6.1 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1 et soit*

$a, b \in I$ avec $a \leq b$. Alors la longueur Longueur(γ, a, b) *vérifie*

$$\text{Longueur}(\gamma, a, b) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} ||\overrightarrow{\gamma(a_k^n))\gamma(a_{k+1}^n)}||$$

avec $a_k^n = a + \frac{k}{n}(b-a)$, $a_{k+1} = a + \frac{k+1}{n}(b-a)$ si $n \in \mathbf{N}^*$ et si $k = 0, .., n-1$.

Preuve La preuve suit le schéma suivant.

Dans un premier temps on montre que si $n \in \mathbf{N}^*$ et si $k = 0, .., n-1$ alors

$$||\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)}|| \leq \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} ||\gamma'(t)||dt.$$

Pour obtenir cette inégalité on considère u_k^n, vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)} = ||\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)}||u_k^n$. Il vient alors

$$||\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)}|| =< u_k^n, \overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)} > .$$

Or

$$\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)} = \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} \gamma'(t)dt.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
||\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)}|| &=< u_k^n, \overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)} > \\
&=< u_k^n, \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} \gamma'(t)dt > \\
&= \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} < u_k^n, \gamma'(t) > dt \\
&\leq \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} ||\gamma'(t)||dt
\end{aligned}$$

car, si $t \in [a_k^n, a_{k+1}^n]$,

$$< u_k^n, \gamma'(t) >\leq ||\gamma'(t)||.$$

En sommant sur $k = 0, ..., n-1$ et en utilisant la relation de Chasles il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1} ||\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)}|| \leq \int_a^b ||\gamma'(t)||dt.$$

Dans un deuxième temps on montre que si $n \in \mathbf{N}^*$ et si $k = 0, .., n-1$ et si on pose $||\gamma'(t)|| = ||\gamma'(a_k^n)|| + r_k^n(t)$ et $\gamma'(t) = \gamma'(a_k^n) - R_k^n(t)$ alors

$$\int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} ||\gamma'(t)||dt \leq ||\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)}|| + \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} ||R_k^n(t)||dt + \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} |r_k^n(t)|dt.$$

Pour obtenir cette inégalité on considère v_k^n, vecteur unitaire tel que $\gamma'(a_k^n) = ||\gamma'(a_k^n)||v_k^n$. Il vient alors

$$||\gamma'(a_k^n)|| = < v_k^n, \gamma'(a_k^n) >$$

et donc

$$\begin{aligned}
\int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} ||\gamma'(t)||dt &\leq \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} \left(||\gamma'(a_k^n)|| + |r_k^n(t)|\right) dt \\
&\leq \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} ||\gamma'(a_k^n)||dt + \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} |r_k^n(t)|dt \\
&\leq \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} < v_k^n, \gamma'(a_k^n) > dt + \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} |r_k^n(t)|dt \\
&\leq < v_k^n, \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} \gamma'(a_k^n)dt > + \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} |r_k^n(t)|dt \\
&\leq < v_k^n, \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} (\gamma'(t) + R_k^n(t))dt > + \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} |r_k^n(t)|dt \\
&\leq < v_k^n, \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} \gamma'(t)dt > + < v_k^n, \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} R_k^n(t)dt > + \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} |r_k^n(t)|dt \\
&\leq < v_k^n, \overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)} > + \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} ||R_k^n(t)||dt + \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} |r_k^n(t)|dt \\
&\leq ||\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)}|| + \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} ||R_k^n(t)||dt + \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} |r_k^n(t)|dt.
\end{aligned}$$

Dans un troisième temps, par un argument de continuité uniforme, on montre que si $\varepsilon >$ il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $n \geq N$ alors pour tout $k = 0, ..., n-1$ et quels que soient $t, t' \in [a_k^n, a_{k+1}^n]$ on a

$$||\gamma'(t) - \gamma'(t')|| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ et } |||\gamma'(t)|| - ||\gamma'(t')||| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

qui implique, en prenant $t' = a_k^n$, $||R_k^n(t)|| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ et $|r_k^n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ et donc par intégration

$$\int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} ||\gamma'(t)||dt \leq ||\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)}|| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(a_{k+1}^n - a_k^n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(a_{k+1}^n - a_k^n)$$

c'est à dire

$$\int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} ||\gamma'(t)||dt \leq ||\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)}|| + \frac{\varepsilon}{(b-a)}(a_{k+1}^n - a_k^n).$$

En sommant sur $k = 0, ..., n-1$ et en utilisant la relation de Chasles il vient

$$\int_{a_0^n}^{a_n^n} ||\gamma'(t)||dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} ||\gamma'(t)||dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} ||\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)}|| + \frac{\varepsilon}{(b-a)} \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}^n - a_k^n)$$

pour $n \geq N$.

Puisque $a_0^n = a$, $a_n^n = b$ et que $\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}^n - a_k^n) = (b-a)$ on a donc

$$\int_a^b ||\gamma'(t)||dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} ||\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)}|| + \varepsilon$$

pour $n \geq N$, c'est à dire

$$\int_a^b ||\gamma'(t)||dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} ||\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)}|| + \varepsilon$$

pour $n \geq N$.

En combinant ce résultat avec l'inégalité obtenue lors de la première étape on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $n \geq N$ alors

$$\left| \int_a^b ||\gamma'(t)||dt - \sum_{k=0}^{n-1} ||\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)}|| \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci signifie bien que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} ||\overrightarrow{\gamma(a_k^n)\gamma(a_{k+1}^n)}|| = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$$

comme annoncé.

Définition 6.7 On appelle sphère unité de $\mathbf{R}^n$ et on note S_{n-1} la sphère de rayon 1 centrée en l'origine de $\mathbf{R}^n$. Avec un point de vue affine, c'est la sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathbf{R}^n$

$$S_{n-1} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n | x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\}$$

des points de l'espace affine $\mathbf{R}^n$ à une distance 1 de l'origine. Avec un point de vue vectoriel, c'est la sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathbf{R}^n$

$$S_{n-1} = \{(u_1, ..., u_n) \in \mathbf{R}^n | x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\}$$

des vecteurs de l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^n$ de norme 1.

Définition 6.8 Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^k avec $k \geq 1$. On dit que γ est paramétrée par l'abscisse curviligne si $||\gamma'(t)|| = 1$ pour tout $t \in I$.

Dans ce cas pour tous $a, b \in I$ tels que $a \leq b$

$$\text{Longueur}(\gamma, a, b) = b - a.$$

Remarques 6.11 • Une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ de classe C^k avec $k \geq 1$ est une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne si et seulement si l'application γ' est à valeurs dans la sphère unité S_{n-1}.

• Si $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ est une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne et de classe C^k avec $k \geq 1$ alors $\beta : J \to I$ définie par $\beta(s) = s + \mu$ avec $J = I - \mu$ est telle que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \beta$ est encore une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne et de classe C^k.

• Si $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ est une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne et de classe C^k avec $k \geq 1$ alors $\beta : -I \to I$ définie par $\beta(s) = -s$ est telle que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \beta$ est encore une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne et de classe C^k.

Proposition 6.11 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée régulière de classe C^k avec $k \geq 1$ et $a \in I$. Alors la fonction qui à $t \in I$ associe $\int_a^t ||\gamma'(u)||du$ est un difféomorphisme de classe C^k de I dans un intervalle J de $\mathbf{R}$ qui contient l'origine et sa réciproque $\beta : J \to I$ est une bijection de classe C^k telle que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \beta$ est une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne.*

Proposition 6.12 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ et $\tilde{\gamma} : J \to \mathbf{R}^n$ des courbes de classe C^k avec $k \geq 1$ et paramétrées par l'abscisse curviligne. La courbe paramétrée $\tilde{\gamma}$ est C^k-équivalente à la courbe paramétrée γ si et seulement s'il existe $\beta : J \to I$ définie par $\beta(s) = s + \mu$ avec $J = I - \mu$ ou par $\beta(s) = -s + \mu$ avec $J = \mu - I$ telle que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \beta$.*

Proposition 6.13 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée régulière de classe C^k avec $k \geq 1$ et $a \in I$. Alors γ est C^k-équivalente à une courbe paramétrée par* *l'abscisse curviligne et de classe C^k. Plus précisément si $t_0 \in I$ il existe exactement deux courbes paramétrées par l'abscisse curviligne et de classe C^k, $\tilde{\gamma}_1 : J_1 \to \mathbf{R}^n$ et $\tilde{\gamma}_2 : J_2 \to \mathbf{R}^n$ avec $0 \in J_1 \cap J_2$, qui sont C^k-équivalentes à γ et qui vérifient $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0) = \gamma(t_0)$ et pour tout réel t on a $s \in J_1$ si et seulement si $-s \in J_2$ et alors $\tilde{\gamma}_1(s) = \tilde{\gamma}_2(-s)$.*

Proposition 6.14 *Soit Γ une sous-variété de dimension 1 et de classe C^k avec $k \geq 1$ de $\mathbf{R}^n$, c'est à dire une courbe de classe C^k avec $k \geq 1$ de $\mathbf{R}^n$. Si Γ est connexe alors il existe une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$, de classe C^k telle que $\Gamma = \gamma(I)$ et qui vérifie l'une des deux propriétés suivantes :*
- l'application γ est injective ;
- l'intervalle I est égal à $\mathbf{R}$, l'application γ est périodique de période $l > 0$ et la restriction de γ à $[\alpha, \alpha + l[$ est injective quel que soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

7 Courbes planes

Définition 7.1 Une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ est dite plane si $n = 2$.

7.1 Contact

Définition 7.2 Soit $\gamma_1 : I \to \mathbf{R}^2$ et $\gamma_2 : J \to \mathbf{R}^2$ deux courbes paramétrées de classe C^k avec $k \in \mathbf{N}^*$, $d \in \{1, ..., k\}$, $t_1 \in I$ et $t_2 \in J$. On suppose que t_1 et $t_2$sont des points réguliers de γ_1 et γ_2 tels que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2$. On dit γ_1 en t_1 et γ_2 en t_2 ont un contact d'ordre au moins d s'il existe des intervalles J_1 et J_2 inclus dans I_1 et I_2 et contenant t_1 et t_2, il existe un ouvert U contenant $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, il existe des coordonnées affines dans les quelles $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ à pour coordonnées 0, $\gamma_1(J_1) \cap U$ et $\gamma_2(J_2)$ sont les graphes d'applications f_1 et f_2 de classe C^k définie sur un intervalle centré à l'origine et à valeurs dans $\mathbf{R}$ telles que $f_1 - f_2$ s'annule à l'ordre au moins d en 0. Si $d = 2$ les deux courbes paramétrées sont dites osculatrices (en t_1 et t_2), si $d \geq 3$ elles sont dites surosculatrices.

Exemples 7.1 • Si $r > 0$ le cercle de centre $(0, r)$ et de rayon r paramétré par $t \in \mathbf{R} \mapsto (r\cos(t), r + r\sin(t))$ et la parabole paramétrée par $t \in \mathbf{R} \mapsto (t, \frac{1}{2r}t^2)$ sont des courbes paramétrées de classe C^∞ qui sont osculatrices en $t_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $t_2 = 0$.

• L'axe Ox paramétré par $t \in \mathbf{R} \mapsto (t, 0)$ et le graphe du cube paramétré par $t \in \mathbf{R} \mapsto (t, t^3)$ sont des courbes paramétrées de classe C^∞ qui sont surosculatrices en $t_1 = t_2 = 0$

7.2 Courbure

Définition 7.3 Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^k avec $k \geq 1$. Le repère de Frénet de γ en t est la base orthonormale directe $(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{n}(t))$ où $\overrightarrow{u}(t)$ est l'unique vecteur unitaire tel que $\gamma'(t) = ||\gamma'(t)||\overrightarrow{u}(t)$ et $\overrightarrow{n}(t)$ est l'unique vecteur unitaire et orthogonal à $\overrightarrow{u}(t)$ tel que $(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{n}(t))$ est directe. C'est aussi l'image par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ du vecteur $\overrightarrow{u}(t)$. Le vecteur $\overrightarrow{n}(t)$ s'appelle vecteur normal en t à γ.

Remarques 7.1 • Si $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ est une courbe de classe C^k avec $k \geq 1$ paramétrée par l'abscisse curviligne, le vecteur tangent $\gamma'(t)$ est égal à $\overrightarrow{u}(t)$ le premier vecteur du repère de Frénet de γ en t.

• Si $\gamma : I \to \mathbf{R}^2, t \to \gamma(t) = (x(t), y(t))$ est une courbe de classe C^k avec $k \geq 1$ paramétrée par l'abscisse curviligne, alors le vecteur tangent $\gamma'(t)$ et le second vecteur du repère de Frénet en t sont

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = \overrightarrow{u}(t) \text{ et } \overrightarrow{n}(t) = (-y'(t), x'(t)).$$

Proposition 7.1 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe plane de classe au moins C^2 paramétrée par l'abscisse curviligne. Alors pour tout $t \in I$ les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont orthogonaux :*

$$< \gamma'(t), \gamma''(t) >= 0.$$

Remarque 7.2 (interprétation physique) En mécanique newtonienne l'accélération à l'instant t d'un point matériel de masse unitaire est égal à la somme des forces qui s'exercent sur ce point à cet instant. Aussi la proposition précédente démontre qu'un point matériel qui subit à tout instant des forces dont la somme est orthogonale à sa vitesse se déplace à une vitesse de norme constante.

Définition 7.4 Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe plane de classe au moins C^2 paramétrée par l'abscisse curviligne. On appelle courbure de γ en t la norme $|K|(t) = ||\gamma''(t)||$ du vecteur dérivée seconde de γ. On appelle courbure algébrique de γ en t le produit scalaire $K(t) =< \overrightarrow{n}(t), \gamma''(t) >$ où $\overrightarrow{n}(t)$ est le vecteur normal en t à γ :

$$|K|(t) = ||\gamma''(t)|| = | < \overrightarrow{n}(t), \gamma''(t) > | = |K(t)|.$$

Proposition 7.2 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe plane de classe au moins C^2 paramétrée par l'abscisse curviligne. Alors*

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{u}(t), \ \gamma''(t) = K(t)\overrightarrow{n}(t) \text{ et } \overrightarrow{n}'(t) = -K(t)\overrightarrow{u}(t) = -K(t)\gamma'(t).$$

Proposition 7.3 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe plane de classe au moins C^2*

paramétrée par l'abscisse curviligne et soit $t \in I$. La courbure algébrique $K(t)$ est nulle si et seulement si $\gamma''(t) = 0$.

Remarque 7.3 Si $\gamma = (x, y) : I \to \mathbf{R}^2$ qui à $t \in I$ associe $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ est une courbe plane de classe au moins C^2 paramétrée par l'abscisse curviligne alors sa courbure algébrique en t vaut $K(t) = -y'(t)x''(t) + x'(t)y''(t)$ et sa courbure en t vaut donc $|K|(t) = |-y'(t)x''(t) + x'(t)y''(t)|$.

Proposition 7.4 *Soit $\gamma = (x, y) : I \to \mathbf{R}^2$ qui à $t \in I$ associe $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une courbe plane de classe C^k avec $k \geq 2$ paramétrée par l'abscisse curviligne. Soit $\hat{\gamma} : I \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ l'application définie par $\hat{\gamma}(t, s) = \gamma(t) + s\overrightarrow{n}(t)$ où $\overrightarrow{n}(t)$ est le vecteur normal en t à γ si $s \in I$. Alors $\hat{\gamma}$ est de classe au moins C^{k-2} et si $(t, s) \in I \times \mathbf{R}$ alors la matrice de la différentielle $d\hat{\gamma}_{(t,s)}$ relativement au repère de Frénet en t est*

$$\begin{pmatrix} x'(t) - sy''(t) & -y'(t) \\ y'(t) + sx''(t) & x'(t) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette dernière vaut $1 - s < \overrightarrow{n}(t), \gamma''(t) >$. Il s'annule en (t, s) si et seulement si s est l'inverse de la courbure algébrique de γ en t.

Définition 7.5 Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe plane de classe C^k avec $k \geq 2$ paramétrée par l'abscisse curviligne. Soit $t \in I$ tel que la courbure $K(t)$ de γ en t soit non nulle. Alors l'inverse $R(t)$ de cette courbure s'appelle le rayon de courbure et l'image

$$\Omega(t) = \hat{\gamma}(t, R(t)) = \gamma(t) + R(t)\overrightarrow{n}(t) = \gamma(t) + \frac{1}{K(t)}\overrightarrow{n}(t)$$

s'appelle le centre de courbure de γ en t. Supposons que la courbure ne s'annule pas. Alors la courbe paramétrée γ est dite birégulière et la courbe paramétrée

$\Omega : I \to \mathbf{R}^2$ de classe C^{k-2} ainsi définie s'appelle développée de γ : c'est la courbe des centres de courbure de la courbe paramétrée γ. La courbe γ est une développante de Ω.

Proposition 7.5 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe plane de classe C^k avec $k \geq 2$ paramétrée par l'abscisse curviligne. Les cercles qui passent par $\gamma(t)$ et qui sont centrés sur la droite qui passe par $\gamma(t)$ et dirigée par la normale $\overrightarrow{n}(t)$ sont les cercles qui ont comme tangente en $\gamma(t)$ la tangente à γ en t. Si $K(t)$ n'est pas nulle le cercle centré au centre de courbure de γ en t et de rayon $R(t)$ est celui qui a un contact d'ordre au moins 2 avec $\gamma(J)$ en $\gamma(t)$ pour tout intervalle ouvert J contenant t et suffisamment petit. Si $K(t) = 0$ c'est la droite tangente en t à γ qui a un contact d'ordre au moins 2 avec $\gamma(J)$ en $\gamma(t)$ pour tout intervalle ouvert J contenant t et suffisamment petit.*

Proposition 7.6 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe plane de classe C^k avec $k \geq 3$ paramétrée par l'abscisse curviligne et birégulière. Alors sa développée $\Omega : I \to \mathbf{R}^2$ définie par $\Omega(t) = \gamma(t) + R(t)\overrightarrow{n}(t)$ est une courbe paramétrée de classe C^{k-2} et le vecteur tangent $\Omega'(t)$ à Ω en t vérifie*

$$\Omega'(t) = R'(t)\overrightarrow{n}(t) = -\frac{K'(t)}{K^2(t)}\overrightarrow{n}(t).$$

Corollaire 7.1 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe plane de classe C^k avec $k \geq 3$ paramétrée par l'abscisse curviligne et birégulière. On suppose que sa développée $\Omega : I \to \mathbf{R}^2$ est régulière. Alors si $a, b \in I$ avec $a \leq b$ la longueur d'arc* $\text{Longueur}(\Omega, a, b)$ *est égale à la valeur absolue de la différence des rayons de* *courbure $R(b)$ et $R(a)$ de γ en b et a :*

$$\text{Longueur}(\Omega, a, b) = |R(b) - R(a)|.$$

Proposition 7.7 *Soit $k : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^k avec $k \geq 0$, $a \in I$, $p \in \mathbf{R}^2$ et $\overrightarrow{u} \in \mathbf{R}^2$ de norme 1. Alors il existe une et une seule courbe plane $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ de classe C^k avec $k \geq 3$ paramétrée par l'abscisse curviligne et birégulière telle que $\gamma(a) = p$, $\gamma'(a) = \overrightarrow{u}(t)$ et si $t \in I$ la courbure algébrique $K(t)$ de γ en t est égale à $k(t)$.*

7.3 Courbure et convexité

Proposition 7.8 *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe de classe C^k avec $k \geq 2$. Alors l'arc $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ défini par $\gamma(t) = (t, f(t))$ est C^k-équivalent à une courbe plane de classe C^k avec $k \geq 2$ paramétrée par l'abscisse curviligne et dont la courbure algébrique ne change pas de signe.*

Proposition 7.9 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe plane de classe C^k avec $k \geq 2$ paramétrée par l'abscisse curviligne. On suppose que sa courbure algébrique ne change pas de signe. Alors, pour tout $t \in I$ il existe un intervalle J inclus dans I et contenant t, il existe un ouvert U contenant $\gamma(t)$, il existe des coordonnées affines dans les quelles $\gamma(J) \cap U$ est le graphe d'une application de classe C^k et convexe définie sur un intervalle non vide et à valeurs dans $\mathbf{R}$.*

Corollaire 7.2 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe plane de classe C^k avec $k \geq 2$ paramétrée par l'abscisse curviligne. On suppose que sa courbure algébrique change de signe en t. Alors γ présente une inflexion en t*

7.4 Courbure sans paramétrisation par l'abscisse curviligne

Proposition 7.10 *Soit* $\gamma = (x, y) : I \to \mathbf{R}^2$ *qui à* $t \in I$ *associe* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *une courbe paramétrée et régulière de classe* C^k *avec* $k \geq 2$, $\beta : J \to I$ *un difféomorphisme de classe* C^k *et croissant tel que* $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \beta$ *soit une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne,* $s \in J$ *et* $t \in I$ *tel que* $t = \beta(s)$*. Si* $k \geq 2$ *alors la courbure algébrique de* $\tilde{\gamma}$ *en* s *vaut*

$$K(s) = \frac{-y'(t)x''(t) + x'(t)y''(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

et sa courbure en t *vaut*

$$|K|(s) = \frac{|-y'(t)x''(t) + x'(t)y''(t)|}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}.$$

Remarque 7.4 Cette proposition permet de donner un sens à la courbure et à la courbure algébrique d'une courbe plane, paramétrée et régulière de classe C^k avec $k \geq 2$. Si $\gamma = (x, y) : I \to \mathbf{R}^2$ est une courbe paramétrée et régulière de classe C^k avec $k \geq 2$, on appelle courbure algébrique de γ en t le nombre

$$K(t) = \frac{-y'(t)x''(t) + x'(t)y''(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

et on appelle courbure de γ en t le nombre

$$|K|(t) = \frac{|-y'(t)x''(t) + x'(t)y''(t)|}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}.$$

7.5 Courbure totale

Définition 7.6 Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe plane de classe C^k avec $k \geq 2$ paramétrée par l'abscisse curviligne. La courbure totale de γ est l'intégrale

$$|K|(\gamma) = \int_I |K|(t)dt$$

et la courbure algébrique totale de γ est l'intégrale

$$K(\gamma) = \int_I K(t)dt.$$

Théorème 7.1 *(admis) Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe plane de classe C^k avec $k \geq 2$ paramétrée par l'abscisse curviligne. On suppose que $I = \mathbf{R}$ et que γ est périodique de période l. Alors l est égale à* Longueur$(\gamma, 0, l)$, *la courbure totale de $\gamma_{]0,l[}$ est supérieure ou égale à 2π et la courbure algébrique totale de $\gamma_{]0,l[}$ appartient à $2\pi\mathbf{Z}$.*

7.6 Théorème des quatre sommets

Définition 7.7 Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe plane de classe C^k avec $k \geq 3$ paramétrée par l'abscisse curviligne. On appelle sommet de γ un t tel que $K'(t) = 0$.

Théorème 7.2 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe plane de classe C^k avec $k \geq 2$ paramétrée par l'abscisse curviligne. On suppose que $I = \mathbf{R}$, que γ est périodique de période l et que la courbure algébrique est de signe constant. Alors sur l'intervalle* $[0, l[$ *la dérivée K' de la courbure s'annule au moins quatre fois : la courbe paramétrée γ possède sur* $[0, l[$ *au moins quatre sommets.*

7.7 Enveloppe

Définition 7.8 Une famille à un paramètre de courbes paramétrées de classe C^k avec $k \geq 1$ et régulières est une application $\Gamma : I \times J \to \mathbf{R}^2$ de classe C^k avec I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$ et telle que tout $s \in J$ la courbe paramétrée $\Gamma_s : I \to \mathbf{R}^2$ définie par $\Gamma_s(t) = \Gamma(t, s)$ est régulière. Une enveloppe de cette famille est une courbe paramétrée $\gamma : J \to \mathbf{R}^2$, de classe au moins C^1 et régulière telle que si pour tout $s \in J$, $\gamma(s) = \Gamma_s(t(s))$ et les vecteurs $\gamma'(s)$ et $\Gamma'_s(t(s)))$ colinéaires pour un certain $t(s) \in I$.

Proposition 7.11 *Soit $\Gamma : I \times J \to \mathbf{R}^2$ de classe C^k avec $k \geq 1$ une famille à un paramètre de courbes paramétrées $\Gamma_s : I \to \mathbf{R}^2$, $s \in J$, définies par $\Gamma_s(t) = \Gamma(t, s)$. S'il existe une difféomorphisme $T : J \to I$ de classe au moins C^1 qui vérifie $\dfrac{\partial F}{\partial t}(T(s), s)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial s}(T(s), s)$ colinéaires pour tout $s \in J$ alors la courbe paramétrée $\gamma : J \to \mathbf{R}^2$, de classe au moins C^1 et régulière définie par $\gamma(s) = \Gamma(T(s), s)$ est une enveloppe de la famille Γ.*

Exemples 7.2 • Une courbe paramétrée de classe au moins 1 et régulière est l'enveloppe de ses tangentes.

• La développée d'une courbe paramétrée de classe au moins 3 et birégulière est l'enveloppe de ses normales.

• La parabole donnée par $\gamma : s \in \mathbf{R} \mapsto ((-2s, 1 + s^2)$ est l'enveloppe de la famille de droites donnée par $\Gamma : (t, s) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (t, s(t + (1 + s)) + (1 + s))$.

8 Courbes de l'espace de dimension trois

8.1 Repère de Serret-Frénet

Définition 8.1 Une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ de classe C^k avec $k \geq 2$ est dite birégulière si $(\gamma'(t), \gamma''(t))$ est libre quel que soit $t \in I$.

Définition 8.2 Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe paramétrée de classe C^k avec $k \geq 2$ et birégulière et soit $t \in I$. Le repère de Serret-Frénet de γ en t est la base orthonormale directe $(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{n}(t), \overrightarrow{b}(t))$ telle que d'une part le vecteur $\overrightarrow{u}(t)$ est l'unique vecteur unitaire tel que $\gamma'(t) = ||\gamma'(t)||\overrightarrow{u}(t)$ et d'autre part le vecteur $\overrightarrow{n}(t)$ est l'unique vecteur unitaire du plan vectoriel engendré par $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$, orthogonal à $\overrightarrow{u}(t)$ et vérifiant $< \overrightarrow{n}(t), \gamma''(t) >> 0$.

Remarque 8.1 En dimension 2 le vecteur $\overrightarrow{n}(t)$ était déterminé à partir du vecteur $\gamma'(t)$ et de l'orientation du plan et il existait dès que la courbe paramétrée γ était régulière. En dimension 3, il est déterminé à partir du couple $(\gamma'(t), \gamma''(t))$ et la régularité de la courbe ne suffit plus, on la suppose birégulière.

Définition 8.3 Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe paramétrée de classe C^k avec $k \geq 2$ et birégulière, et soit $(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{n}(t), \overrightarrow{b}(t))$ le repère de Serret-Frénet de γ en un $t \in I$:
- le plan vectoriel engendré par $(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{n}(t))$ est appelé plan osculateur à γ en t,
- le plan vectoriel engendré par $(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{b}(t))$ est appelé plan rectifiant à γ en t,
- le plan vectoriel engendré par $(\overrightarrow{n}(t), \overrightarrow{b}(t))$ est appelé plan normal à γ en t.

8.2 Courbure et torsion

Proposition 8.1 *Si $f : I \to S_{n-1}$ est une courbe paramétrée de classe au moins C^1 à valeur dans la sphère unité de $\mathbf{R}^n$ alors pour tout $t \in I$ les vecteurs $f(t)$ et*

$f'(t)$ *sont orthogonaux :*

$$< f(t), f'(t) >= 0.$$

Remarque 8.2 Ce résultat est une généralisation à toute dimension finie au résultat déjà connu pour les vecteurs tangents des courbes planes paramétrées par l'abscisse curviligne. Il se prouve de la même façon.

Corollaire 8.1 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe de classe au moins C^2 paramétrée par l'abscisse curviligne. Alors pour tout $t \in I$ les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont orthogonaux :*

$$< \gamma'(t), \gamma''(t) >= 0.$$

Remarque 8.3 Si $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ est une courbe de classe C^k avec $k \geq 1$ paramétrée par l'abscisse curviligne et birégulière, le vecteur tangent $\gamma'(t)$ est égal à $\overrightarrow{u}(t)$, le premier vecteur du repère de Frénet de γ en t.

Définition 8.4 Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe de classe au moins C^2 paramétrée par l'abscisse curviligne. On appelle courbure de γ en t la norme $|K|(t) = ||\gamma''(t)||$ du vecteur dérivée seconde de γ.

Remarque 8.4 Alors qu'en dimension 2 on pouvait définir la notion de courbure algébrique ce n'est plus possible en dimension 3. Cela résulte que, contrairement à ce qui se passait en dimension 2, le vecteur normal $\overrightarrow{n}(t)$ qui n'est défini que si γ est birégulière dépend de $\gamma''(t)$.

Proposition 8.2 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe de classe au moins C^3 paramétrée par l'abscisse curviligne et birégulière. Alors il existe une fonction $\tau : I \to \mathbf{R}$ de classe au moins C^{k-3} et appelée torsion de γ telle que*

$$\overrightarrow{n}'(t) = -|K|(t)\overrightarrow{u}(t) + \tau(t)\overrightarrow{b}(t)$$

et

$$\overrightarrow{b}'(t) = -\tau(t)\overrightarrow{n}(t)$$

où $(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{n}(t), \overrightarrow{b}(t))$ *est le repère de Serret-Frénet de* γ $t \in I$.

Exemple 8.1 Soit $R > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\omega > 0$ tel que $\omega^2(R^2 + \lambda^2) = 1$ et γ la courbe paramétrée par l'abscisse curviligne définie par

$$\gamma(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), \lambda\omega t) \text{ si } t \in I.$$

Alors γ qui est une paramétrisation d'une hélice circulaire admet comme courbure $|K|(t) = \dfrac{R}{R^2 + \lambda^2}$ et comme torsion $\tau(t) = \dfrac{\lambda}{R^2 + \lambda^2}$ quel que soit $t \in I$.

Proposition 8.3 *Soit* I *un intervalle ouvert contenant* 0 *et* $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ *une courbe de classe au moins* C^3 *paramétrée par l'abscisse curviligne et birégulière. Alors il existe* ε_1, ε_2, ε_3 *des fonctions continues de* I *dans* $\mathbf{R}$ *et nulles en* 0 *telles que si* $t \in I$ *alors*

$$\begin{aligned}\gamma(t) = \gamma(0) + & (1 + \varepsilon_1(t))t\overrightarrow{u}(0) + \\ & \frac{|K|(0)}{2}(1 + \varepsilon_2(t))t^2\overrightarrow{n}(0) + \\ & \frac{|K|(0)\tau(0)}{6}(1 + \varepsilon_3(t))t^3\overrightarrow{b}(0)\end{aligned}$$

Exemple 8.2 Soit $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = (t, \lambda t^2, \mu t^3) \text{ si } t \in \mathbf{R}$$

et soit $\beta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ le difféomorphisme de classe C^∞ telle que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \beta$ soit une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne qui vérifie $\tilde{\gamma}(0) = 0$, $\tilde{\gamma}'(0) = (1, 0, 0)$. Alors la courbure de $\tilde{\gamma}$ en 0 vaut $|K|(0) = 2\lambda$ et sa torsion $\tau(0) = \dfrac{3\mu}{\lambda}$.

Proposition 8.4 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe de classe au moins C^2 paramétrée par l'abscisse curviligne et birégulière. Alors $\gamma(I)$ est inclus dans un plan si et seulement si sa torsion est identiquement nulle.*

Proposition 8.5 *Soit I un intervalle contenant 0, $\tau : I \to \mathbf{R}$ de classe au moins C^0 et $K : I \to \mathbf{R}^{+_ast}$ de classe au moins C^1. Alors ces fonctions sont la torsion et la courbure algébrique d'une et une seule courbe de classe au moins C^3 paramétrée par l'abscisse curviligne et birégulière $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ telle que $\gamma(0) = (0,0,0)$ et telle que le repère de Serret-Frénet en 0 associé à γ est la base canonique de $\mathbf{R}^3$.*

8.3 Courbure et torsion sans paramétrisation par l'abscisse curviligne

Proposition 8.6 *Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe paramétrée et régulière de classe C^k avec $k \in \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$ et soit $\beta : J \to I$ un difféomorphisme de classe C^k tel que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \beta$ soit une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne. Soit $s \in J$ et $t \in I$ tels que $t = \beta(s)$. Si $k \geq 2$ la courbure $|K|(s)$ de $\tilde{\gamma}$ en s vaut*

$$|K|(s) = \frac{||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)||}{||\gamma'(t)||^3}$$

et si $k \geq 3$ et γ birégulière la torsion $\tau(s)$ de $\tilde{\gamma}$ en s vaut

$$\tau(s) = \frac{< \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) >}{||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)||^2}.$$

Remarque 8.5 Cette proposition permet de donner un sens à la courbure d'une courbe paramétrée et régulière de classe C^k avec $k \geq 2$ et à sa torsion si la courbe est birégulière et si $k \geq 3$. Si $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe paramétrée et régulière de classe C^k avec $k \in \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$, on appelle courbure de γ en t le nombre

$$|K|(t) = \frac{||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)||}{||\gamma'(t)||^3}$$

et si $k \geq 3$ et γ birégulière on appelle torsion de γ en t le nombre

$$\tau(t) = \frac{< \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) >}{||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)||^2}.$$

8.4 Courbure totale

Définition 8.5 Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe de classe C^k avec $k \geq 2$ paramétrée par l'abscisse curviligne. La courbure totale de γ est l'intégrale

$$|K|(\gamma) = \int_I |K|(t)dt.$$

Théorème 8.1 *(admis) Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe de classe C^k avec $k \geq 2$ paramétrée par l'abscisse curviligne. On suppose que $I = \mathbf{R}$ et que γ est périodique de période l. Alors l est égale à* Longueur$(\gamma, 0, l)$*, la courbure totale de $\gamma_{]0,l[}$ est supérieure ou égale à 2π.*

8.5 Coordonnées polaires, cylindriques et sphériques

Définition 8.6 Les coordonnées polaires d'un point $a = (a_1, a_2)$ de $\mathbf{R}^2$ sont les couples $(r, \theta) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ tels que

$$\begin{cases} a_1 = r\cos(\theta), \\ a_2 = r\sin(\theta). \end{cases}$$

Remarques 8.6 • On peut toujours prendre $\theta \in [0, 2\pi]$.

• Tout a non nul admet un unique couple $(r,\theta) \in \mathbf{R}^{+*} \times [-\pi,\pi[$ de coordonnées polaires.

Exemples 8.3 (de courbes paramétrées en coordonnées polaires)

• Le cercle centré à l'origine et de rayon R est donné en coordonnées polaires par

$$t \in \mathbf{R} \mapsto (R,t).$$

• Une spirale d'Archimède est une courbe paramétrée en coordonnées polaires par

$$t \in \mathbf{R} \mapsto (\lambda+\mu t, t)$$

avec $\lambda > 0$ et $\mu \in \mathbf{R}^*$.

• Une spirale logarithmique est une courbe paramétrée en coordonnées polaires par

$$t \in \mathbf{R} \mapsto (\lambda\mu^t, t)$$

avec $\lambda, \mu > 0$ et $\mu \neq 1$.

• La droite $x = R$ avec $R > 0$ est une courbe paramétrée en coordonnées polaires par

$$t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\mapsto (\frac{R}{\cos(t)}, t).$$

• La courbe paramétrée en coordonnées polaires par

$$t \in \mathbf{R} \mapsto (\frac{p}{1-e\cos(t)}, t)$$

avec $p > 0$ et $e \in \mathbf{R}^+$ est une conique. Si l'excentricité e vaut 0, c'est un cercle. Si $e \in]0,1[$ c'est une ellipse. Si $e = 1$ c'est une parabole. Si $e > 1$ c'est une hyperbole.

Définition 8.7 Les coordonnées cylindriques d'un point $a = (a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbf{R}^3$

sont les triplets $(r, \theta, a_3) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tels que

$$\begin{cases} a_1 &= r\cos(\theta), \\ a_2 &= r\sin(\theta). \end{cases}$$

Remarques 8.7 • On peut toujours prendre $\theta \in [-\pi, \pi]$.

• Tout a n'appartenant pas à l'axe Oz admet un unique triplet $(r, \theta, a_3) \in \mathbf{R}^{+*} \times [-\pi, \pi[\times \mathbf{R}$ de coordonnées cylindriques.

Exemple 8.4 Une hélice qui s'appuie sur un cylindre d'axe vertical et de rayon $R > 0$ est donnée en coordonnées cylindriques par

$$t \in \mathbf{R} \mapsto (R\cos(t), R\sin(t), R\lambda t)$$

où $\lambda \in \mathbf{R}$ est la pente de la droite tangente à l'hélice en $t \in \mathbf{R}$ quelconque.

Définition 8.8 Les coordonnées sphériques d'un point $a = (a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbf{R}^3$ sont les triplets $(r, \theta, \phi) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tels que

$$\begin{cases} a_1 &= r\cos(\theta)\cos(\phi), \\ a_2 &= r\sin(\theta)\cos(\phi), \\ a_3 &= r\sin(\phi). \end{cases}$$

Remarques 8.8 • Il est courant d'appeler θ longitude et ϕ latitude.

• On peut toujours prendre $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

• Tout a n'appartenant pas à l'axe Oz admet un unique triplet $(r, \theta, \phi) \in \mathbf{R}^{+*} \times [-\pi, \pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de coordonnées sphériques.

Exemple 8.5 La courbe paramétrée en coordonnées sphériques par

$$t \in \mathbf{R} \mapsto (1, t, 2\arctan(\exp(\frac{t}{\lambda})))$$

avec $\lambda \in \mathbf{R}^*$ est une loxodromie qui s'appuie sur la sphère unité et qui fait un angle constant avec les méridiens (θ =cte) et les parallèles (z =cte).

9 Surfaces de l'espace de dimension trois

9.1 Surfaces régulières

Définition 9.1 Soit $k \geq 1$. Un sous-ensemble non vide S de $\mathbf{R}^3$ est une surface régulière de classe C^k si pour tout $a \in S$ il existe une base b de $\mathbf{R}^3$, un ouvert non vide U de $\mathbf{R}^2$, un intervalle non vide J de $\mathbf{R}$ et une application $f : U \to J$ de classe C^k tels que dans les coordonnées affines associées au repère affine (a, b) l'intersection $S \cap (U \times J)$ est égale au graphe de f.

Remarque 9.1 Une surface régulière de $\mathbf{R}^3$ est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbf{R}^3$.

Exemples 9.1 • Un plan inclus dans $\mathbf{R}^3$ est est une surface régulière de classe C^k de $\mathbf{R}^3$.

• Le graphe d'une application $f : U \to \mathbf{R}$ de classe C^k où U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $k \geq 1$ est une surface régulière de classe C^k de $\mathbf{R}^3$.

• Les sphères $S_2(a, R)$ avec $a \in \mathbf{R}^3$ et $R > 0$ sont des surfaces régulières de classe C^∞ de $\mathbf{R}^3$.

• Soit $a, b, c, d \in \mathbf{R}^*$. Alors la quadrique S définie par

$$S = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | ax^2 + by^2 + cz^2 = d\}$$

est soit vide, soit une surface régulière de classe C^∞ de $\mathbf{R}^3$.

• Soit $a, b, c \in \mathbf{R}^*$. Alors le cône C défini par

$$C = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | ax^2 + by^2 + cz^2 = 0\}$$

n'est pas une surface régulière de classe C^∞ de $\mathbf{R}^3$ mais le cône épointé

$S^* = S \setminus \{0\}$, s'il n'est pas vide, est une surface régulière de $\mathbf{R}^3$.

• La surface régulière C de classe C^∞ de $\mathbf{R}^3$ définie par

$C = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = R^2\}$ avec $R > 0$ est un cylindre de révolution d'axe Oz.

• La surface régulière S de classe C^∞ de $\mathbf{R}^3$ définie par

$$S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = \cosh^2(z)\}$$

est une caténoïde.

• La surface régulière T de classe C^∞ de $\mathbf{R}^3$ définie par

$$T = \{(x, y, z) | (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$$

avec $0 < r < R$ est un tore de révolution par rapport à l'axe Oz.

• La surface régulière H de classe C^∞ de $\mathbf{R}^3$ définie par

$$H = \{(x, y, z) | x \sin(\lambda z) = y \cos(\lambda z)\}$$

avec $\lambda \in \mathbf{R}^*$ est un hélicoïde.

Définition 9.2 Une surface de révolution (par rapport à l'axe Oz est une surface régulière S et de classe C^k avec $k \geq 1$ invariante sous l'action de toute rotation d'axe Ozs : si R_θ est la rotation d'angle θ autour de l'axe Oz avec $\theta \in \mathbf{R}$ alors

$R_\theta(S) = S$.

Exemples 9.2 Parmi les exemples précédents, les sphères dont le centre est sur l'axe Oz, les cylindres de révolution d'axe Oz, les plans horizontaux, les caténoïdes, les tores de révolution d'axe Oz, les quadriques et les cônes lorsque $a = b$ sont des surfaces de révolution d'axe Oz.

Proposition 9.1 *Si $f : I \to \mathbf{R}^{+\infty}$ est une application de classe C^k avec $k \geq 1$ alors*

$$S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = f^2(z)\}$$

est une surface de révolution d'axe Oz et de classe C^k.

Définition 9.3 Si S est une surface de révolution d'axe Oz et de classe C^k avec $k \geq 1$ alors l'ensemble

$$M = S \cap \{y = 0, x > 0\}$$

s'appelle méridien de S.

Proposition 9.2 *Le méridien M d'une surface de révolution S d'axe Oz et de classe C^k avec $k \geq 1$ est une courbe de classe C^k.*

Exemples 9.3 • L'hyperboloïde de révolution à une nappe

$$S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = \lambda + \mu z^2\}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbf{R}^{+*}$ est une surface de révolution d'axe Oz, de classe C^∞ et de méridien une branche d'hyperbole.

• La caténoïde est une surface de révolution d'axe Oz, de classe C^∞ et de méridien une chaînette.

Définition 9.4 Une surface réglée est une surface régulière S et de classe C^k avec $k \geq 1$ telle qu'en chacun de ses points passe une droite contenue dans la surface (ou au moins un intervalle ouvert inclus dans une droite).

Exemples 9.4 • L'hélicoïde est une surface réglée.

• L'hyperboloïde de révolution à une nappe est une surface réglée.

• Le conoïde de Plücker donné par l'équation

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \text{ avec } (x, y) \neq (0, 0)$$

est une surface réglée.

• Le conoïde circulaire C donné par l'équation

$$y^2 = (z - 1)^2(1 - x^2) \text{ avec } z \in]0, 1[$$

est une surface réglée.

• Le parapluie de Whithney donné par l'équation

$$x^2 = y^2 z \text{ avec } (x, y) \neq (0, 0)$$

est une surface réglée.

• Le parapluie de Cartan donné par l'équation

$$z(x^2 + y^2) = y^3 \text{ avec } (x, y) \neq (0, 0)$$

est une surface réglée.

9.2 Plan tangent, vecteur normal et application de Gauss

Définition 9.5 Soit $k \geq 1$, $S \subset \mathbf{R}^3$ une surface régulière de classe C^k. Soit a un point de S, b une base de $\mathbf{R}^3$, U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$, J un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et $f : U \to J$ une application de classe C^k tels que dans les coordonnées affines associées au repère affine (a, b) l'intersection $S \cap (U \times J)$ soit égale au graphe de f. Alors le plan tangent T_aS à S en a est l'image de l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ qui à $u \in \mathbf{R}^2$ associe $(u, df_a(u))$. Les vecteurs de T_aS sont appelés vecteurs tangents à S en a.

Proposition 9.3 *Dans la définition précédente, T_aS ne dépend pas du choix de b, U, J et f.*

Définition 9.6 Soit $S \subset \mathbf{R}^3$ une surface régulière de classe C^k avec $k \geq 1$ et a un point de S. On appelle vecteur normal à S en a un vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ qui engendre la droite $T_a^{\perp}$ orthogonale au plan tangent T_aS à S en a.

Définition 9.7 Soit $k \geq 1$, $S \subset \mathbf{R}^3$ une surface régulière de classe C^k, U un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $f : U \to \mathbf{R}^3$ une immersion de classe C^k et injective telle que $f(U) \subset S$. Alors l'application $\mathcal{G}_f : U \to S_2$ définie par

$$\mathcal{G}_f : (t, s) \in U \mapsto \mathcal{G}_U(t, s) = \frac{\frac{\partial f}{\partial t}(t, s) \wedge \frac{\partial f}{\partial s}(t, s)}{||\frac{\partial f}{\partial t}(t, s) \wedge \frac{\partial f}{\partial s}(t, s)||},$$

est une application de classe C^{k-1} qui associe à tout $(t, s) \in U$ un des deux vecteurs normaux à S en $f(t, s)$. Elle est appelée application de Gauss (associée à f).

Proposition 9.4 *Soit $k \geq 1$, $S \subset \mathbf{R}^3$ une surface régulière de classe C^k, U un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $f : U \to \mathbf{R}^3$ une immersion de classe C^k et injective telle que $f(U) \subset S$, V un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $g : V \to \mathbf{R}^3$ une immersion de classe C^k et* *injective telle que $g(V) \subset S$. Alors $\mathcal{G}_f(t) = \pm\mathcal{G}_g(s)$ si $t \in U$ et $s \in V$ sont tels que $f(t) = g(s)$.*

Remarque 9.2 Cette proposition implique que, au signe près l'application de Gauss $\mathcal{G}_S$ est bien définie en chaque point d'une surface.

9.3 Première forme fondamentale et aire d'une surface

Définition 9.8 Soit $k \geq 1$, $S \subset \mathbf{R}^3$ une surface régulière de classe C^k et $a \in S$ un point de S. La première fondamentale $\mathcal{F}_{Ia}$ de S en a est la restriction au plan tangent T_aS de la forme quadratique associée au produit scalaire c'est à dire c'est la restriction au plan tangent T_aS de l'application qui à un vecteur v associe le carré de sa norme :

$$\mathcal{F}_{Ia}(v) = ||v||^2 \text{ si } v \in T_aS.$$

Proposition 9.5 *Soit $k \geq 1$, $S \subset \mathbf{R}^3$ une surface régulière de classe C^k, U un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f : U \to \mathbf{R}^3$ une immersion de classe C^k telle que $f(U) \subset S$. Soit E, F et G les fonctions définies par*

$$E(p) =< \frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial x}(p) >,\ F(a) =< \frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) >,\ G(a) =< \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) >$$

si $p \in U$. Alors les fonctions E, F et G vérifient les propriétés suivantes :

- *si $v = (v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2$ alors $df_p(v) \in T_{f(p)}S$ et*

$$\mathcal{F}_{If(p)}(df_p(v)) = ||df_p(v)||^2 = E(p)v_1^2 + 2F(p)v_1v_2 + G(p)v_2^2$$

et donc les fonctions E, F, G permettent de calculer la première forme fondamentale,

• *si $\gamma : I \to U \subset \mathbf{R}^2$ est une courbe paramétrée, régulière et de classe C^k alors $\tilde{\gamma} = f\circ : I \to S \subset \mathbf{R}^3$ est une courbe paramétrée, régulière et de classe C^k et si $a, b \in I$ sont tels que $a \leq b$ alors la longueur de courbe paramétrée $\tilde{\gamma}$ entre a est b vérifie*

$$\begin{aligned}\text{Longueur}(\tilde{\gamma}, a, b) &= \int_a^b \mathcal{F}_{I\gamma(t)} df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\gamma'(s)^{tr} \begin{pmatrix} E(\gamma(t)) & F(\gamma(t)) \\ F(\gamma(t)) & G(\gamma(t)) \end{pmatrix} \gamma'(t)dt}.\end{aligned}$$

Exemple 9.5 Soit $R > 0$, S le cylindre

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 = R^2\}$$

et $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ définie par

$$(t, s) \in \mathbf{R}^2 \mapsto f(t, s) = \begin{cases} x(t, s) = & R\cos(t) \\ y(t, s) = & R\sin(t) \\ z(t, s) = & Rs. \end{cases}$$

Alors f est une immersion, $f(\mathbf{R}^2) = S$ et si $(t, s) \in \mathbf{R}^2$ on a

$$E(t, s) = R^2,\ F(t, s) = 0,\ G(t, s) = R^2.$$

Par conséquent si $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ est une courbe paramétrée, régulière et de classe C^k avec $k \geq 1$ et si $a, b \in I$ avec $a \leq b$ alors

$$\text{Longueur}(f \circ \gamma, a, b) = R \cdot \text{Longueur}(\gamma, a, b).$$

Proposition 9.6 *Soit $k \geq 1$, $S \subset \mathbf{R}^3$ une surface régulière de classe C^k, U et V des ouverts de $\mathbf{R}^2$ et $f : U \to \mathbf{R}^3$ et $g : V \to \mathbf{R}^3$ des immersions de classe C^k et injectives telles que $f(U) = g(V) \subset S$ et telles que $S \setminus f(U)$ et $S \setminus g(v)$ sont incluses dans des réunions de familles au plus dénombrables de courbes de classe C^k. Alors on a l'égalité*

$$\int_U ||\frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}|| = \int_V ||\frac{\partial g}{\partial x} \wedge \frac{\partial g}{\partial y}||.$$

Définition 9.9 Soit $k \geq 1$, $S \subset \mathbf{R}^3$ une surface régulière de classe C^k, U un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f : U \to \mathbf{R}^3$ une immersion de classe C^k et injective telle que $f(U) \subset S$ et $S \setminus f(U)$ est incluse dans la réunion d'une famille au plus dénombrable de courbes de classe C^k. L'aire $\mathrm{Aire}(S)$ de la surface S est

$$Aire(S) = \int_U ||\frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}||.$$

Remarque 9.3 D'après la proposition précédente, l'aire ainsi définie est indépendante du choix de l'immersion injective dont l'image est la surface considérée à une union au plus dénombrable de courbes près.

Proposition 9.7 *Soit $k \geq 1$, $S \subset \mathbf{R}^3$ une surface régulière de classe C^k, U un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f : U \to \mathbf{R}^3$ une immersion de classe C^k et injective telle que $f(U) \subset S$. Soit E, F et G les fonctions définies par*

$$E(p) =< \frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial x}(p) >, \ F(a) =< \frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) >, \ G(a) =< \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) >$$

si $p \in \ U$. Alors

$$||\frac{\partial f}{\partial x}(p) \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(p)|| = \sqrt{E(p)G(p) - F^2(p)} \text{ si } p \in U$$

et donc

$$\text{Aire}(f(U)) = \int_U \sqrt{EG - F^2}.$$

Exemple 9.6 Soit $R, h > 0$, S le cylindre

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 = R^2, z \in]0, h[\}$$

et $f :]0, 2\pi[\times]0, \frac{h}{R}[\to \mathbf{R}^3$ définie par

$$(t, s) \in]0, 2\pi[\times]0, \frac{h}{R}[\mapsto f(t, s) = \begin{cases} x(t, s) = & R\cos(t) \\ y(t, s) = & R\sin(t) \\ z(t, s) = & Rs. \end{cases}$$

Alors f est une immersion injective, $f(]0, 2\pi[\times]0, \frac{h}{R}[)$ est égal à S privé d'un intervalle et est une immersion, $f(\mathbf{R}^2) = S$ et si $(t, s) \in]0, 2\pi[\times]0, \frac{h}{R}[$ on a

$$E(t, s) = R^2,\ F(t, s) = 0,\ G(t, s) = R^2.$$

Par conséquent l'aire $\text{Aire}(S)$ de S vaut

$$\text{Aire}(S) = \int_{]0,2\pi[\times]0,\frac{h}{R}[} R^2 dt \cdot ds = 2\pi Rh.$$

9.4 Deuxième forme fondamentale et courbures moyenne et de Gauss

Définitions 9.10 Soit $k \geq 2$, $S \subset \mathbf{R}^3$ une surface régulière de classe C^k, $a \in S$, b une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$ dont les deux premiers vecteurs engendrent le plan tangent T_aS de S en a. Il existe un ouvert U de $\mathbf{R}^2$, un intervalle J de $\mathbf{R}$ et une application $f : U \to J$ de classe C^k tels que dans les coordonnées affines

(x, y, z) associées au repère affine (a, b) l'intersection $S \cap (U \times J)$ est égale au graphe de f. Par construction $f(0) = 0$, $df(0) = 0$ et T_aS est le plan horizontal d'équation $z = 0$.

• La dérivée seconde de f en 0 définie sur T_aS une forme quadratique notée $\mathcal{F}_{IIa}$ et appelée seconde forme fondamentale.

• La forme quadratique $\mathcal{F}_{IIa}$ est, comme toute forme quadratique ortho-diagonalisable. Ainsi, le plan tangent T_aS admet une base orthonormale (u_1, u_2) formée de vecteurs propres de cette forme. Dans les coordonnées la deuxième forme fondamentale $\mathcal{F}_{IIa}$ s'écrit $k_1 dx_1^2 + k_2 dx_2^2$.

• Les valeurs propres k_1 et k_2 de la deuxième forme fondamentale $\mathcal{F}_{IIa}$ sont appelées courbures principale de S en a. Leur moyenne H est appelée courbure moyenne de S en a. Leur produit K est appelé courbure de Gauss de S en a. Si $k_1 \cdot k_2 > 0$ a est dit elliptique, $k_1 \cdot k_2 < 0$ il est dit hyperbolique, si une des valeurs propres s'annule mais pas l'autre il est dit parabolique. Si $k_1 = k_2 = 0$ a est un méplat et c'est un ombilic si les deux valeurs propres sont égales et non nulles.

Proposition 9.8 *Soit $k \geq 2$, $S \subset \mathbf{R}^3$ une surface régulière de classe C^k, $a \in S$, N un plan passant par a et contenant les vecteurs normaux à S en a et $\gamma : I \to N$ une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne et de classe C^k. On suppose qu'il existe $t_a \in I$ tel que $\gamma(t_a) = a$. Alors la courbure $|K|(t_a)$ de γ en t_a vérifie*

$$|K|(t_a) = |\mathcal{F}_{IIa}(\gamma'(t_a))|.$$

Remarque 9.4 Soit (u_1, u_2) une base orthonormale de T_aS formée de vecteurs propres de la forme quadratique $\mathcal{F}_{IIa}$. Dans cette base $\mathcal{F}_{IIa}$ est donnée en coordonnées par $k_1 dx_1^2 + k_2 dx_2^2$ où k_1 et k_2 sont les courbures principales. Si dans la proposition précédente le plan normal N contient le vecteur $\cos(\theta)u_1 + \sin(\theta)u_2$ de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ alors la courbure en t_a de la courbe γ de la proposition est donnée par la formule

$$|K|(t_a) = |k_1 \cos(\theta)^2 + k_2 \sin(\theta)^2|$$

et ceci constitue le théorème d'Euler pour la courbure. Cette courbure s'appelle courbure normale de S en a associée au plan normal N.

Proposition 9.9 *Soit $k \geq 2$, $S \subset \mathbf{R}^3$ une surface régulière de classe C^k, U un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $f : U \to \mathbf{R}^3$ une immersion de classe C^k et injective telle que $f(U) \subset S$. Alors la seconde forme fondamentale $\mathcal{F}_{II}$ est reliée à la différentielle $d\mathcal{G}_f$ de l'application de Gauss $\mathcal{G}_f$ de la façon suivante : si $p \in U$, $a \in S$, $v \in \mathbf{R}^2$ et $w \in T_aS$ vérifient $a = f(p)$ et $w = df_a(v)$ alors*

$$\mathcal{F}_{IIa}(w) =< d\mathcal{G}_f(p)(v), v > .$$

9.5 Courbure totale

Proposition 9.10 *Soit $k \geq 1$, S une surface compacte de classe C^k de $\mathbf{R}^3$, $a \in S$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à T_aS. Alors S admet une unique application de Gauss $\mathcal{G}_S$ de classe C^{k-1} qui vérifie $\mathcal{G}_S(a) = \overrightarrow{n}$.*

Remarque 9.5 Cette proposition indique que si S est une surface compacte, l'application de Gauss peut être définie globalement sur S. Si $k \geq 2$, associée à cette application de Gauss, la courbure de Gauss est une application $K : S \to \mathbf{R}$ de classe C^{k-2}.

Définition 9.11 Soit $k \geq 2$, S une surface compacte de classe C^k de $\mathbf{R}^3$, $a \in S$,

$\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à T_aS, $\mathcal{G}_S$ l'application de Gauss telle que $\mathcal{G}_S(a) = \overrightarrow{n}$ et $K : S \to \mathbf{R}$ la courbure de Gauss associée. Soit aussi U un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f : U \to \mathbf{R}^3$ une immersion de classe C^k et injective telle que $f(U) \subset S$ et $S \setminus f(U)$ est incluse dans la réunion d'une famille au plus dénombrable de courbes de classe C^k. La courbure totale $K(S)$ de S est définie par

$$|K(S)| = \left| \int_S K \right| = \left| \int_U K \circ f \cdot < \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}, \overrightarrow{n} > \right|.$$

Remarque 9.6 Cette définition de la courbure totale d'une surface compacte est indépendante du choix de f.

Théorème 9.1 *(de Gauss-Bonnet) Soit $k \geq 2$ et S une surface compacte de classe C^k de $\mathbf{R}^3$. Alors il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que*

$$|K(S)| = 2\pi n.$$

Table des matières