Université de Rennes L3 Mathématiques

UFR Mathématiques

2024-2025

Courbes et surfaces paramétrées

Résumé des séances

Version provisoire du 14 janvier 2025

Le programme.

Courbes

Courbes régulières. Donner plusieurs exemples. Changement de paramètre admissible.

Vecteur tangent, longueur d'une courbe et abscisse curviligne.

Vecteur normal, courbure.

Produit vectoriel. Trièdre de Serret-Frénet et torsion.

Exemples de courbes en coordonnées polaires.

Surfaces

Surfaces régulières. Donner plusieurs exemples (surfaces de révolution).

Plan tangent, vecteur normal et application de Gauss. Première forme fondamentale et aire d'une surface.

L'évaluation. Elle sera réalisée en deux contrôles d'une heure et donnant les notes C_1 et C_2, chacune sur 20, et un contrôle d'une heure et demie et donnant la note

C_3, sur 20 également. La note finale F est donnée par la formule

$$F = \max\left(\min\left(\frac{C_1+C_2}{2};10\right);\frac{C_1+C_2+C_3}{3};C3\right).$$

Les contrôles d'une heure auront lieu à 16h45 les 13/02 et 27/03 et le dernier contrôle, d'une heure et demie, aura lieu à 08h00 le 05/05.

07/01. (Prévisionnel: *Exemples d'application des théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites. Courbes paramétrées (régulières ou pas). C^k-équivalence, changement de paramètre admissible.*)

Le théorème d'inversion locale (en dimension finie) est énoncé et il est illustré par quelques exemples :

- la fonction sinus ;

- une fonction f du type $f(x) = \sin(x) + x^2 g(x)$ avec g de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$;

- la fonction $z \in \mathbf{C} \mapsto z^2 \in \mathbf{C}$ donnée par $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ en coordonnées réelles ;

- la fonction $z \in \mathbf{C} \mapsto exp(z) \in \mathbf{C}$ donnée par
$(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \exp(x) \cdot (\cos(y), \sin(y))$ en coordonnées réelles.

Les deux derniers exemples sont l'occasion d'évoquer les similitudes directes.

Le théorème des fonctions implicites (en dimension finie) est donné. Il est expliqué comment déduire ce théorème de celui d'inversion locale.

Des exemples de base sont étudiés :

- la fonction définie par $f(x, y) = y - \alpha(x)$ où α est une fonction de classe C^k définie sur un intervalle ouvert ;

- les fonctions f_R définies par $f_R(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$ associées aux cercles centrés à l'origine ;

- la fonction f définie par $f(x, y) = x^3 - y^2$ dont le niveau 0 est une cuspide (le dictionnaire de l'Académie française dit que c'est entre autre la *pointe raide et acérée qui se développe à l'extrémité des feuilles de certains végétaux* et il donne comme exemple l'ananas).

La définition de courbe paramétrée de classe C^k est donnée ($\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ de classe C^k avec I intervalle ouvert non vide). La définition de courbe régulière est aussi donnée (courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ de classe C^k avec $k \geq 1$ et telle que $\gamma'(t)$ n'est jamais nul). Le premier exemple proposé est celui d'une application affine de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$ donnée par $f(t) = A + tV$ avec $A \in \mathbf{R}^n$, $V \in \mathbf{R}^n$ et non nul et dont l'image est une droite. Le second exemple est l'application $t \in \mathbf{R} \mapsto (t^2, t^3)$ dont l'image est la cuspide d'équation $x^3 - y^2 = 0$. Le troisième exemple est celui de l'application $t \in \mathbf{R} \mapsto (t^3 - t, t^2)$. Le dernier exemple consiste à considérer de plusieurs façons un cercle unité $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ (ou une partie) comme image d'une courbe paramétrée :

- $\gamma :]-1, 1[\to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})$ ($\gamma(-1, 1[) = C \cap \{y > 0\}$) ;
- $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ($\gamma(\mathbf{R}) = C$) ;
- $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$ ($\gamma(\mathbf{R}) = C \setminus \{(0, -1)\}$).

Ce dernier exemple est l'occasion de citer la notion de projection stéréographique bien utile pour faire des cartes qui conservent les angles et qui permettent de naviguer.

Certains des exemples ont été donnés avec Geogebra en début de séance.

Il est indiqué qu'une méthode due à Peano permet de construire une application continue et surjective d'un intervalle dans le carré $[0, 1]^2$.

La définition de C^k-équivalence (avec $k \geq 1$) est donnée (les courbes paramétrées $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ et $\Gamma : J \to \mathbf{R}^n$ de classe C^k sont C^k-équivalentes si et seulement s'il existe $\theta : I \to J$ difféomorphisme C^k tel que $\gamma = \Gamma \circ \theta$ (θ est un changement de paramètre admissible) et il indiqué que cette relation est une relation d'équivalence dont les classes s'appellent arcs géométriques (de classe C^k).

14/01. (Prévisionnel: *C^k-équivalence. Vecteur tangent. Exemples.*)

On revient rapidement sur la paramétrisation rationnelle du cercle et on explique ce que sont les projections stéréographiques de pôles Sud et Nord en indiquant leur intérêt en navigation. C'est l'occasion d'évoquer Hipparque (environ -190, -120), sa liste d'étoiles et de mentionner son implication dans l'histoire des projections stéréographiques.

On précise que les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites qui avaient été énoncés en se plaçant à l'origine pour la source et le but peuvent être énoncés sans contrainte sur le point à la source et sur son image pourvu que les conditions de rang soient vérifiées.

On établit un énoncé d'immersion locale. Plus précisément on considère une application f de classe C^k (avec $k \geq 1$) définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ et à valeurs de $\mathbf{R}^{p+q}$. On écrit f sous la forme $f = (g, h)$ avec g à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ et h dans $\mathbf{R}^q$. On suppose que $f(0) = 0$ et que le rang de $dg(0)$ est p. Alors on prouve que quitte à restreindre U il existe $\phi : V \to \mathbf{R}^q$ de classe C^k défini sur V ouvert égal à $g(U)$ tel que $f(U) = \{(X, \phi(X)) | X \in V\}$.

C'est l'occasion de donner une signification à l'expression "quitte à restreindre".

On illustre cet énoncé d'immersion locale avec les courbes paramétrées de classe C^k (avec $k \geq 1$) et régulières, ayant éventuellement des points multiples.

On précise que si $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ est une courbe paramétrée de classe C^k (avec $k \geq 1$) alors $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), ..., \gamma_n'(t))$ est appelé vecteur tangent à γ en $\gamma(t)$.

On rappelle dans la séance la notion de courbe régulière de classe C^k et ce que signifie qu'une courbe paramétrée de classe C^k est C^k-équivalente à une autre et on montre que cette relation est une relation d'équivalence. On revoit ainsi les notions de réflexivité, de transitivité et de symétrie sur l'exemple.

On définit ce qu'est la longueur d'un arc paramétré : si $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ est une courbe paramétrée de classe C^k (avec $k \geq 1$) et si $a < b$ sont deux réels de l'intervalle I alors $l(\gamma, a, b)$, la longueur d'arc paramétré associé à γ entre a et b, est donnée par

$$l(\gamma, a, b) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt.$$

On s'assure que si $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ est donnée par $\gamma(t) = tA + (1-t)B$ (paramétrisation barycentrique de la droite passant par $A \in \mathbf{R}^n$ et $B \in \mathbf{R}^n$) alors

$$l(\gamma, 0, 1) = ||\overrightarrow{AB}||.$$

On vérifie très rapidement que si $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ est donnée par $\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$ (paramétrisation angulaire du cercle centré à l'origine de $\mathbf{R}^2$) et si $a < b$ sont deux réels alors

$$l(\gamma, a, b) = R(b-a).$$

21/01. (Prévisionnel: *Tracé de courbe (méthode). Rappel sur l'uniforme continuité. Longueur d'une courbe et abscisse curviligne (géométrie différentielle et limite d'arcs polygonaux).*)

28/01. (Prévisionnel: *Paramétrisation par l'abscisse curviligne. Vecteur normal, courbure.*)

30/01. (Prévisionnel: *Exemple avec Geogebra. Courbure et application de Gauss. Courbure totale.*)

06/02. (Prévisionnel: *Produit vectoriel. Trièdre de Serret-Frénet et torsion.*)

13/02. Premier contrôle continu (16h45-17h45 + 20 minutes pour tiers-temps).

25/02. (Prévisionnel: *Coordonnées polaires, cylindrique, sphériques. Synthèse des séances sur les courbes.*)

04/03. (Prévisionnel: *Surfaces paramétrées, surfaces régulières et singulières.*)

11/03. (Prévisionnel: *Exemples. Plan tangent. Vecteur normal. Application de Gauss. Ruban de Möbius. Sphère. Projection stéréographique.*)

18/03. (Prévisionnel: *Quelques rappels. Bouteille de Klein et Ruban de Möbius. Exemple de surface réglée.*)

25/03. (Prévisionnel: *Singularités d'une surface.*)

27/03. Deuxième contrôle continu (16h45-17h45 + 20 minutes pour tiers-temps).

01/04. (Prévisionnel: *Première forme fondamentale.*)

22/04. (Prévisionnel: *Aire d'une surface. Seconde forme fondamentale. Courbures de Gauss et moyenne. Points elliptiques, paraboliques, hyperboliques et ombilics.*)

29/04. (Prévisionnel: *Synthèse des séances sur les surfaces.*)

05/05. Dernier contrôle (08h-09h30 + 30 minutes pour tiers-temps).