Université de Rennes — L3 Mathématiques

UFR Mathématiques — Courbes et surfaces paramétrées

2023-2024 — Feuille d'exercices 4

Exercice 1 Montrer que si γ est une courbe de $\mathbf{R}^3$ paramétrée par l'abscisse curviligne et si A est une isométrie alors $A \circ \gamma$ est aussi une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne.

Exercice 2 Montrer que si γ est une courbe régulière de $\mathbf{R}^3$ à courbure et torsion constantes alors c'est une hélice circulaire : dans un repère euclidien γ est définie par

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt) \text{ avec } a > b > 0.$$

Exercice 3 Donner la développée de la parabole d'équation

$$y = x^2.$$

Exercice 4 Montrer que la développée de l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec } a, b > 0$$

est l'astroïde donné par

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Exercice 5 Montrer que la chaînette est la caustique obtenue à partir de rayons lumineux verticaux se réfléchissant sur le graphe de l'exponentielle. Autrement dit, la chaînette est l'enveloppe des droites $d_x, x \in \mathbf{R}$ telles que si $x \in \mathbf{R}$ la tangente au graphe de l'exponentielle au point $(x, \exp(x))$ est une bissectrice de l'angle fait par d_x et la droite verticale passant par ce point.

Exercice 6 Montrer que $\phi :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ définie par

$$\phi(t,s) = (\cos(t)\cos(s), \cos(t)\sin(s), \sin(t))$$

est une paramétrisation régulière de la sphère privé de ses pôles $(0,0,1)$ et $(0,0,-1)$.

Exercice 7 Donner le plan tangent à la sphère unité en un quelconque de ses points.

Exercice 8 On considère le tore S dont une paramétrisation est

$$\phi(t,s) = (\cos(t)(2+\cos(s)), \sin(t)(2+\cos(s)), \sin(s)).$$

1. Calculer la première forme fondamentale de S.

2. Calculer la surface du tore.

Exercice 9 Calculer l'aire du tronc de paraboloïde de révolution donné par

$$z = x^2 + y^2,\ 0 < z < 1.$$

Exercice 10 Calculer k_1, k_2, H et K à l'origine lorsque S est donnée par une des équations suivantes :

1. $z = x^2 - y^2$;

2. $z = 2xy^2 + 3y^2 + x^6$;

3. $z = 3x^2 - 2xy + xy^2$.

Exercice 11 En chacun de ses points, calculer la première et la deuxième forme fondamentale de la selle de cheval S donnée par

$$\phi(t,s) = (t, s, t^2 - s^2)$$

puis calculer la courbure de Gauss.

Exercice 12 On considère l'hélicoïde S qui est donnée par par

$$\phi(t,s) = (t\cos(s), t\sin(s), s) \ s, t \in \mathbf{R}.$$

1. Montrer que l'hélicoïde est une surface régulière.

2. Calculer la première et la deuxième forme fondamentale de cette surface.

3. Calculer K et H en tout point de S.

Exercice 13 Étudier l'existence de points elliptiques ou d'ombilics sur une surface minimale, c'est à dire une surface en tout point de laquelle la courbure moyenne est nulle. Une telle surface peut-elle être compacte ?

Exercice 14 Montrer qu'une surface régulière dont la seconde forme fondamentale est nulle appartient à un plan.

Exercice 15 Soit S le cône donné par

$$\phi(t,s) = (t, s, \sqrt{t^2+s^2}) \text{ si } (t,s) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{O\}.$$

On considère l'application $\psi :]0,+\infty) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ définie par

$$\psi(u,v) = \phi(\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}\arctan(\frac{y}{x}), \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\arctan(\frac{y}{x})).$$

1. Montrer que $\psi(]0,+\infty) \times \mathbf{R}) \subset S$.

2. Montrer que si γ est une courbe régulière contenue dans $]0,+\infty) \times \mathbf{R}$ alors $\psi \circ \gamma$ est une courbe régulière de même longueur.

Exercice 16 On considère le tore S dont une paramétrisation est

$$\phi(t,s) = (\cos(t)(2+\cos(s)), \sin(t)(2+\cos(s)), \sin(s)).$$

1. Calculer K en tout point du tore.

2. Déterminer les régions S_+, S_0 et S_- du tore où K est respectivement positive, nulle, négative.

3. Déterminer les images de S_+, S_0 et S_- par l'application de Gauss Γ.

4. Montrer que l'aire algébrique de $\Gamma(S)$ est nulle.

Exercice 17 Montrer que si P est le point d'une surface compacte S le plus éloigné de l'origine alors

$$K(p) \geq \frac{1}{||\overrightarrow{OP}||^2}.$$

Exercice 18 Montrer qu'une surface S est orientable dès qu'elle possède deux paramétrisations locales dont la réunion des images est S et leur intersection est connexe.

Exercice 19 Montrer que S est une surface orientable si c'est le niveau non singulier d'une fonction C^∞ de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 20 Montrer que la sphère unité est orientable, donner son application de Gauss et calculer sa courbure.

Exercice 21 Montrer que la surface de Klein S définie par

$$\begin{cases} x(t,s) &= (3+\cos(\frac{t}{2})\sin(s) - \sin(\frac{t}{2})\sin(2s))\cos(t) \\ y(t,s) &= (3+\cos(\frac{t}{2})\sin(s) - \sin(\frac{t}{2})\sin(2s))\sin(t) \\ z(t,s) &= \sin(\frac{t}{2})\sin(s) + \cos(\frac{t}{2})\sin(2s) \end{cases}$$

est obtenue en faisant tourner une courbe en *huit* plane et verticale d'un tour par rapport à l'axe vertical et d'un demi-tour sur elle-même.