Université de Rennes — L3 Mathématiques

UFR Mathématiques

2023-2024

Courbes et surfaces paramétrées

Résumé des séances

Version provisoire du 18 avril 2024

L'évaluation sera réalisée en deux contrôles d'une heure et donnant les notes C_1 et C_2, chacune sur 20, et un contrôle d'une heure et demie et donnant la note C_3, sur 20 également. La note finale F est donnée par la formule

$$F = \max\left(\min\left(\frac{C_1 + C_2}{2}; 10\right); \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}; C3\right).$$

Les contrôles d'une heure auront lieu à 16h45 les 01/02 et 04/04 et le dernier contrôle, d'une heure et demie, aura lieu à 15h00 le 06/05.

08/01. (Prévisionnel: *Courbes régulières. Changement de paramètre admissible.*)

Le théorème d'inversion locale (en dimension finie) est énoncé et il est illustré par quelques exemples :

- la fonction sinus ;

- une fonction f du type $f(x) = \sin(x) + x^2 g(x)$ avec g de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$;

- la fonction $z \in \mathbf{C} \mapsto z^2 \in \mathbf{C}$ donnée par $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ en coordonnées réelles.

Le théorème des fonctions implicites (en dimension finie) est donné. Des exemples de base sont étudiés :

- la fonction définie par $f(x,y) = y - \alpha(x)$ où α est une fonction de classe C^k définie sur un intervalle ouvert ;

- les fonctions f_R définies par $f_R(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$ associées aux cercles centrés à l'origine ;

- la fonction f définie par $f(x,y) = x^3 - y^2$ dont le niveau 0 est une cuspide.

La définition de courbe paramétrée de classe C^k est donnée. Le premier exemple proposé est celui d'une application affine de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$ donnée par $f(t) = A + tV$ avec $A \in \mathbf{R}^n$, $V \in \mathbf{R}^n$ et non nul et dont l'image est une droite. Le second exemple est l'application $t \in \mathbf{R} \mapsto (t^2, t^3)$ dont l'image est la cuspide d'équation $x^3 - y^2 = 0$. Le troisième exemple consiste à considérer de plusieurs façons un cercle unité $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ (ou une partie) comme image d'une courbe paramétrée :

- $\gamma :]-1,1[\to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ ($\gamma(-1,1[) = C \cap \{y > 0\}$) ;

- $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ($\gamma(\mathbf{R}) = C$) ;

- $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$ ($\gamma(\mathbf{R}) = C \setminus \{(0,-1)\}$).

La définition de courbes paramétrées C^k-équivalentes est donnée.

15/01. (Prévisionnel: *Vecteur tangent.*)

Il est expliqué pourquoi "être C^k-équivalente à" est une relation d'équivalence. On définit un arc géométrique de classe C^k une classe d'équivalence pour cette relation. Les notions de vecteur tangent et de courbe paramétrée régulière sont introduites. Des exemples sont proposés :

- $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, f(t))$ où $f : I \to \mathbf{R}$ de classe C^k est une courbe régulière ;

- $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ n'est pas une courbe régulière ($\gamma'(0) = 0$) ;

- $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ est une courbe régulière ;

- $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (-t^2, t(t-1)(t+1))$ est une courbe régulière qui possède un point double ($\gamma(-1) = \gamma(1) = (-1, 0)$ et $\gamma'(-1) = (2, 2)$ mais $\gamma'(1) = (-2, 2)$).

Le résultat suivant qui est un corollaire du théorème d'inversion locale en dimension un, est expliqué : soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^k et régulière et soit $t_0 \in I$. Il existe $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0$, des coordonnées affines $(y_1, ..., y_n)$ obtenues en permutant éventuellement les indices et en remplaçant les x_i par $x_i - x_i(t_0)$, $\delta_1, ..., \delta_n > 0$ tels que $\gamma(]t_0 - \varepsilon, t_0 + \tilde{\varepsilon}[)$ soit le graphe d'une application C^k de $]-\delta_1, \delta_1[$ dans $]-\delta_2, \delta_2[\times ... \times]-\delta_n, \delta_n[$.

22/01. (Prévisionnel: *Longueur d'une courbe et abscisse curviligne.*)

En utilisant un développement limité de γ en t_0 où $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ est un arc paramétré de classe au moins C^1 et $t_0 \in I$, on interprète le vecteur tangent $\gamma'(t_0)$.

On liste les principales étapes qui mènent au tracé d'une courbe plane.

À partir de la courbe paramétrée γ_1 définie par $\gamma_1(t) = (-t^2, t(1-t^2))$ on construit deux courbes paramétrées, l'une avec une double asymptote verticale, l'autre avec deux asymptotes horizontales. On considère aussi le tracé de la courbe paramétrée γ_2 définie par $\gamma_2(t) = (\cos(t) + \varepsilon \cos(\frac{1}{2}t), \sin(t))$.

On introduit la notion de longueur d'un arc de courbe paramétrée et on illustre par quelques exemples :

- $\gamma(t) = A + tV$ avec $A, V \in \mathbf{R}^n$ (paramétrisation affine d'une droite affine) ;

- $\gamma(t) = A + f(t)V$ avec $A, V \in \mathbf{R}^n$ et $f : I \to \mathbf{R}$ de classe au moins C^1 (paramétrisation quelconque d'une droite affine) ;

- $\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t), \lambda t)$ avec $R > 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ (hélice).

Le cas de la longueur d'un arc de parabole est évoqué.

On rappelle ce qu'est une fonction (d'une variable) uniformément continue, on montre que la fonction f définie par $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue, on explique comme le contrôle de la dérivée d'une fonction C^k avec $k \geq 1$ permet de montrer qu'elle est uniformément continue. On explique que le concept d'uniforme continuité permet de montrer que la longueur d'un arc de courbe paramétrée est la limite d'une suite de longueurs d'arc polygonaux *approximant* l'arc de courbe paramétré considérée.

La notion d'abscisse curviligne est introduite. Il est indiqué que si $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ est une courbe paramétrée et régulière de classe C^k avec $k \geq 1$ alors il existe $\tilde{\gamma} : J \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne de classe C^k et $\phi : J \to I$ difféomorphisme de classe C^k tels que $\gamma \circ \phi = \tilde{\gamma}$. Le difféomorphisme ϕ est solution de $||\gamma'(\phi)||\phi'(t) = \pm 1$ et sa réciproque ψ est solution de $||\gamma'(t)|| = \pm\psi'(t)$.

29/01. (Prévisionnel: *Vecteur normal, courbure.*)

Il est précisé que si $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ est une courbe paramétrée et régulière de classe C^k avec $k \geq 1$ et si $t_0 \in I$ alors, en définissant $s : I \to \mathbf{R}$ par $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} ||\gamma'(u)||du$, on obtient un difféomorphisme C^k de l'intervalle I dans un intervalle J tel que sa réciproque θ permet de définir une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \theta$ définissant le même arc géométrique que γ.

On discute du cas de la courbe paramétrée γ définie par $\gamma(t) = (\cos(f(t)), \sin(f(t)))$ où $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ difféomorphisme C^k et croissant et du passage à une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne donnant le même arc géométrique.

On examine des changements de variable (translations et passage à l'opposé) d'une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne.

La notion de courbure est introduite dans le cas d'une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ de classe C^k, $k \geq 2$, et régulières. Le cas de la dimension 2 est considéré avec plus d'attention. On considère $\mathbf{R}^2$ comme un plan euclidien orienté de base orthonormée directe $((1,0),(0,1))$. Si $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ de classe C^k, $k \geq 2$ et paramétrée par l'abscisse curviligne et si $t_0 \in I$ on introduit le repère de Frenet $(\gamma'(t_0), \overrightarrow{n})$ (sans le nommer) où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire, normal à $\gamma'(t_0)$ et tel que la base $(\gamma'(t_0), \overrightarrow{n})$ soit directe. Ceci permet de définir la notion de courbure algébrique. On explique comment calculer cette courbure algébrique à partir d'une courbe paramétrée $\tilde{\gamma} : J \to \mathbf{R}^2$ de classe C^k, $k \geq 2$ définissant le même arc géométrique.

On calcule la courbure algébrique dans le cas où γ est donnée par $\gamma(t) = (t, at^2)$ (parabole) et dans le cas où γ est donnée par $\gamma(t) = \sqrt{a^2 - t^2}$ (un cercle).

On donne quelques précisions sur le premier contrôle continu :

- il est composé de quatre exercices notés respectivement sur 4, 4, 6 et 6 ;

- le premier nécessite de savoir ce qu'est une courbé paramétrée et ce qu'est la continuité uniforme d'une fonction réelle de la variable réelle ;

- le deuxième consiste à calculer la longueur d'un "morceau" d'hélice ;

- le troisième est l'étude d'une courbe paramétrée du type $t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = (\cos(2t) + 2\sin(t), \cos(t))$ (régularité, étude des symétries éventuelles, des tangentes verticales et horizontales, tracé) ;

- le quatrième consiste à étudier une courbe γ régulière et à mettre en avant quelques propriétés arithmétiques surprenantes (par exemple si $t \in \mathbf{N}$ alors $\gamma(t)$ est à coordonnées entières et la longueur d'arc entre 0 est t est entière) ;

- savoir que la racine cubique de 2 n'est pas rationnelle permet de répondre à la dernière question du quatrième et dernier exercice.

01/02. Premier contrôle continu (16h45-17h45 + 20 minutes pour tiers-temps).

05/02. (Prévisionnel: *Produit vectoriel. Trièdre de Serret-Frénet et torsion.*)

La séance débute par la remise des copies corrigées du premier contrôle et par l'exposé de quelques commentaires sur celui-ci. C'est l'occasion de donner quelques éléments de réponses aux questions de ce contrôle (en particulier la dernière du dernier exercice). Ensuite Geogebra est utilisé pour montrer et analyser une famille de courbes planes. Il est expliqué que cette famille peut aussi être considérée comme une unique courbe de l'espace observée selon différents points de vue. Ensuite le cours a été consacré encore à la notion de courbure. La notion d'application de Gauss est donnée, la courbure totale d'une courbe de $\mathbf{R}^2$ est définie et un théorème indiquant que la courbure totale d'un lacet de $\mathbf{R}^2$ est un multiple n de 2π est énoncé après quoi sa preuve est esquissée. Des exemples illustrant que cette courbure totale de lacet peut prendre toutes les valeurs $2\pi n$ avec $n \in \mathbf{Z}$ sont donnés.

12/02. (Prévisionnel: *Coordonnées polaires.*)

La séance débute en précisant qu'en général les propriétés étudiées dans le cours Courbes et surfaces paramétrées sont invariantes sous l'action des isométries. Ensuite un rappel est fait sur la notion de courbure (en toute dimension) et, en dimension 2, sur la notion de courbure algébrique. Dans le cadre de la dimension 2 la notion de repère de Frenet est rappelée.

Il est indiqué ce qu'est le rayon courbure et qu'il est associé à ce rayon le cercle qui a le contact maximal (qui est le plus tangent) à l'arc paramétré en un point donné. Il est indiqué que ce cercle s'appelle cercle osculateur.

Quelques éléments de définition du produit vectoriel dans un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée directe sont donnés. La situation de la dimension 3 est considérée plus en détails. Il est aussi signalé la relation entre déterminant et volume.
La définition de courbe bi-régulière est donnée. Ceci permet de définir ce qu'est le repère de Serret-Frénet associé à une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne, bi-régulière et de classe C^3 au moins. On définit alors ce qu'est la torsion et on donne différents moyens théoriques de calculer courbure et torsion.

19/02. Synthèse des séances sur les courbes. Dans la première partie de la séance on passe en revue les notions de longueur de courbe (d'arc), d'arc géométrique, de paramétrisation par l'abscisse curviligne, de courbure, de repère de Frénet associé à une courbe plane régulière paramétrée par l'abscisse curviligne, de courbure algébrique d'une telle courbe, du rayon de courbure, de repère de Serret-Frénet d'une courbe birégulière de $\mathbf{R}^3$ (paramétrée par l'abscisse curviligne), de courbure et de torsion d'une telle courbe. On fait observer que la torsion est signée et traduit dans "quel sens" tourne le repère ed Serret-Frénet. On s'intéresse aussi au cas où l'arc géométrique n'est pas donnée par une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne mais par une courbe paramétrée quelconque. On explique comment calculer courbure et torsionà partir d'un développement limité ad hoc. On discute des liens entre produit vectoriel, produit mixte, déterminant et certaines formules donnant courbure et torsion.
La seconde partie est consacrée à la notion de coordonnées polaires (dans le plan). On calcule le vecteur tangent γ' et la courbure K d'une courbe donnée en coordonnées polaires. On illustre la notion de coordonnées polaires on donnant une

représentation polaire d'un cercle centré à l'origine, d'un cercle passant par l'origine avec une tangente verticale, d'une droite verticale ne passant pas par l'origine, de coniques données par un foyer et une directrice (et l'excentricité), les spirales d'Archimède et logarithmique. On établit la propriété angulaire remarquable des tangentes à une spirale logarithmique. On montre qu'une courbe donnée par foyer, directrice et excentricité est bien le lieu des zéros d'un polynôme de degré deux P(x,y).

On finit la séance par une présentation sommaire nu noeud trèfle. On considère l'ensemble $\{z_1^3 - z_2^2 = 0\} \cap \{|z_1|^2 + |z_2|^2 = 2\}$ de $\mathbf{C}^2$, intersection de la sphère de rayon 2 de $\mathbf{C}^2$ et de la cuspide. On le visualise avec Geogebra en choisissant une représentation stéréographique de la sphère (sans l'indiquer). Il apparaît une courbe qu'on appelle noeud trèfle. Puis on indique que cette courbe peut être représentée comme une courbe sur un un tore de $\mathbf{R}^3$ et on visualise ce phénomène avec Geogebra. On conclut en affirmant qu'un argument de tricoloration permet de montrer qu'on ne peut pas déformer le noeud trèfle sur un noeud trivial. Plusieurs concepts ne sont pas approfondis ni même réellement définis.

11/03. (Prévisionnel: *Surfaces régulières.*)

Après avoir rappelé la notion de coordonnées cylindriques, celle de coordonnées sphériques (rayon, longitude, latitude) est exposée en conclusion de la parties courbes du cours.

On débute ensuite la partie surfaces.

On introduit les notions de surfaces paramétrées et de surfaces (régulières et singulières).

Une surface paramétrée est définie comme application ϕ, différentiable de classe C^k

et de rang 2, définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^3$.

Il est expliqué que pour tout point a de cet ouvert, en réduisant l'ouvert en un voisinage ouvert de a et en choisissant des coordonnées euclidiennes adaptées, l'image $\phi(U)$ est le graphe d'une application différentiable de classe C^k définie sur un rectangle de $\mathbf{R}^2$.

On définit comme étant une surface de $\mathbf{R}^3$ un sous ensemble S de $\mathbf{R}^3$ tel que pour chacun de ses points, il un voisinage Ω de ce point et il existe des coordonnées euclidiennes adaptées,tels que $\Omega \cap S$ est le graphe d'une application différentiable de classe C^k définie sur un rectangle de $\mathbf{R}^2$.

On indique que le théorème des fonctions implicites permet d'obtenir de nombreuses surfaces comme des lieux d'annulation d'une fonction numérique, différentiable, de rang 1 définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^3$.

On donne comme exemple de surface les plans affines.

La fin de la séance est consacrée à l'étude des surfaces associées à l'application définie par $F(x, y, z) = x \exp(y) \ln(z)$.

18/03. (Prévisionnel: *Exemples.*)

On définit le plan tangent en un point à une surface donnée localement comme le lieu des zéros d'une fonction de rang 1 comme le noyau de la différentielle de cette fonction en ce point. On le caractérise comme l'ensemble des vecteurs tangents en ce point des courbes contenues dans la surface. On définit aussi les vecteurs normaux à ue surface de $\mathbf{R}^3$ en un point et on définit l'application de Gauss. On explique que si cette dernière est bien définie lorsque la surface est le lieu des zéros d'une fonction de rang 1 ce n'est pas toujours le cas comme le montre l'exemple du ruban de Möbius. On explique aussi que lorsque la surface S est donnée localement comme l'image d'un ouvert U du plan $\mathbf{R}^2$ par une application ϕ de rang 2, le plan tangent T_aS au point $a = \phi(0)$ est obtenu comme image du plan $\mathbf{R}^2$ par la différentielle $d\phi$ en 0 : $T_a^S = Im(d\phi(0))$. On explique aussi que le produit vectoriel

$$\frac{1}{||d\phi(0)\cdot(\frac{\partial}{\partial x})\wedge d\phi(0)\cdot(\frac{\partial}{\partial y})||}d\phi(0)\cdot(\frac{\partial}{\partial x})\wedge d\phi(0)\cdot(\frac{\partial}{\partial y})$$

est un vecteur normal à T_aS. On traite l'exemple de la sphère centrée à l'origine et de rayon R qu'on donne comme lieu des zéros de $x^2+y^2+z^2-R^2$. On définit aussi les projections stéréographiques de pôles nord et sud de la sphère unité et on précise sans démonstration que ces projections préservent les cercles (et droites) et les angles.

25/03. (Prévisionnel: *Plan tangent.*)

On fait quelques rappels sur différentes notions comme

- le produit vectoriel,

- la courbure d'une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne,

- le calcul de la courbure et de la torsion à partir des vecteurs dérivés successifs $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$ et $\gamma'''(t)$ dans le cas d'une courbe paramétrée quelconque,

- le rang d'une application d'un ouvert de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$,

- l'écriture des rotations autour de l'axe Ox.

On explique comment reconnaître l'écriture implicite en coordonnées polaires $(x(t) = \cos(t)f(t), y(t) = \sin(t)f(t))$.

On donne comme exemples de surfaces particulières la bouteille de klein (par le dessin) et la surface de Klein (obtenue à partir d'un huit, avec Geogebra).

On revient un peu sur le ruban de Moëbius (avec un papier de la colle et des ciseaux).

On étudie la surface d'équation $y^2 + z^2 = 1 + x^2$. On explique pourquoi elle est réglée (engendrée par des droites), pourquoi elle est de révolution et pourquoi elle admet comme courbe méridienne une branche d'hyperbole.

28/03. (Prévisionnel: *Vecteur normal. Application de Gauss.*)

Pendant la séance on explique comment trouver les singularités de la restriction à une surface de classe C^k de $\mathbf{R}^3$ d'une fonction de classe C^k definie sur un ouvert qui contient la surface. Ceci est illustré avec la fonction z restreinte à la surface d'équation $y^2 + z^2 - 1 - x^2 = 0$. Plusieurs notions d'algèbre linéaire ou bilinéaire sont évoquées : dualité, produit "extérieur" (ou vectoriel) de 1-formes linéaires de $\mathbf{R}^3$, forme quadratique, forme bilinéaire, leur ortho-réduction (en lien avec l'ortho-diagonalisation des matrices symétriques). On explique comment à l'aide de la géométrie on peut expliquer la réduction d'une forme quadratique, c'est à l'existence d'une base orthonormée dans laquelle elle s'écrit $a_1 dx_1^2 + ... + a_n dx_n^2$.

Pour se préparer au contrôle qui a lieu jeudi prochain il est conseillé de savoir :

- vérifier qu'une courbe de $\mathbf{R}^3$ paramétrée est paramétrée par l'abscisse curviligne (la courbe en question est une hélice),

- calculer le repère de Serret-Frénet d'une telle courbe,

- calculer la courbure et la torsion d'une telle courbe,

- vérifier qu'une seconde courbe, de $\mathbf{R}^2$ cette fois-ci, est régulière, globalement invariante sous l'action de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe Ox et par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$,

- rechercher les points "multiples" de cette courbe plane et ses points de tangence avec des cercles centrés en l'origine,

- tracer cette courbe,

- calculer la différentielle et le rang d'une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$,

- montrer qu'une certaine quadratique est bien une surface régulière,

- rechercher les points de cette surface en lesquels les plans tangents à la surface correspondent au noyau de dz.

04/04. Deuxième contrôle continu (16h45-17h45 + 20 minutes pour tiers-temps).

08/04. (Prévisionnel: *Première forme fondamentale.*)

On débute en rendant les copies du deuxième contrôle et en donnant quelques éléments de correction des exercices 2, 3 et 4. On essaie en particulier de montrer les relations entre certains points de l'exercice 2 et les groupes de transformations du plan euclidien. On explique aussi que lire la courbe de l'exercice 2 en coordonnées polaires permettait de répondre plus aisément aux questions.

Ensuite, après avoir réparé un oubli en précisant qu'une courbe/courbe régulière de $\mathbf{R}^2$ est l'homologue deux dimensionnel d'une surface/surface régulière de $\mathbf{R}^3$, la notion de première forme fondamentale d'une surface en un point est donnée. On explique comment elle peut être calculée à partir d'une paramétrisation de la surface ou d'une partie de celle-ci. On donne ensuite comme application le calcul de la longueur d'une courbe inscrite sur la surface ainsi que l'aire d'un morceau de surface. On suggère comme exercices de calculer l'aire d'une demie sphère de rayon 1 en considérant les paramétrisations $(\sqrt{1-h^2}\cos(t), \sqrt{1-h^2}\sin(t), h)$ avec $t \in [0, 2\pi]$ et $h \in [0, 1]$ et $(r\cos(t), r\sin(t), \sqrt{1} - r^2)$ avec $t \in [0, 2\pi]$ et $r \in [0, 1]$ [les paramétrisations ne sont pas explicitement données en cours] et de comprendre pourquoi l'aire du morceau de surface paramétré par $f : U \to \mathbf{R}^3$ où f est une application injective et de rang 2 et de classe au moins C^1 définie sur un ouvert U

de $\mathbf{R}^2$ qui est

$$\int_U \left|\left|\frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}\right|\right|$$

est aussi donnée par la formule

$$\int_U \sqrt{EG - F^2}$$

où $E = \left|\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\right|^2$, $F = < \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} >$ et $G = \left|\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\right|^2$.

15/04. (Prévisionnel: *Aire d'une surface.*)

Pendant la première partie de la séance on calcule l'aire d'une demi-sphère en partant de deux paramétrisations différentes de la surface. On explique aussi l'égalité $||u \wedge v|| = \sqrt{||u||^2 \cdot ||u||^2 - < u, v >^2}$ utile dans la formule de l'aire.

Des éléments relatifs au dernier contrôle sont donnés dans la deuxième partie. Il est indiqué qu'il sera demandé d'étudier

- une courbe invariante sous l'action de certaines transformations affines,

- les mouvements de certains points caractéristiques d'un vélo,

- la longueur d'une courbe inscrite sur une sphère,

- l'existence de points elliptiques sur certaines surfaces.

La troisième partie est consacrée à la présentation de la seconde forme fondamentale. Elle est introduite à partir de la représentation locale d'une surface au voisinage d'un point comme graphe d'une fonction f dont la différentielle est nulle en ce point. Plus précisément les coordonnées euclidiennes locales sont choisies de telle sorte que

$$f(x, y) = \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_2}{2}y^2 + (x^2 + y^2)\varepsilon(x, y)$$

avec $\lim_{(0,0)} \varepsilon = 0$. Il est indiqué qu'alors la seconde forme fondamentale est la forme quadratique $k_1x^2 + k_2y^2$. On donne la relation entre cette seconde forme fondamentale est la courbure en a de la courbe obtenue en faisant l'intersection de S avec un plan normal à la surface en a. On définit la courbure de Gauss et la courbure moyenne ainsi que les points elliptiques, paraboliques, hyperboliques et ombilics. On indique que la sphère est de courbure de Gauss constante (égale à 1 si son rayon est 1) et on projette une surface de courbure moyenne identiquement nulle, la caténoïde, et une surface de courbure de Gauss égale à -1, la pseudo-sphère.

17/04. Synthèse des séances sur les surfaces.

Dans la première partie de la séance on donne les formules qui permettent de calculer les courbures principales et donc les courbures de Gauss et moyenne d'une surface de révolution puis on les applique aux cas de la caténoïde et de la pseudosphère. Ces formules sont

$$k_{\text{parallèle}} = \frac{z'' r' - r'' z'}{(r'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ et } k_{\text{méridien}} = \frac{z'}{r(r'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

lorsque la surface est une surface de révolution par rapport à l'axe Oz et dont une méridienne est donnée par $t \mapsto (z(t), r(t))$, ceci impliquant que la surface est donnée par $(t, s) \mapsto (\cos(s)r(t), \sin(s)r(t), z(t))$.

Dans la deuxième partie on donne quelques éléments pour étudier une courbe paramétrée en tournant autour de la question de la recherche des points multiples.

Dans la troisième partie on précise que dans l'optique du dernier contrôle il serait bien de savoir

- étudier la courbe $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = \left(\frac{\cos(t)}{2 + cos(\frac{3}{2}t)}, \frac{\sin(t)}{2 + cos(\frac{3}{2}t)} \right)$ (régularité, points multiples, points de tangence de $\gamma(\mathbf{R})$ avec des cercles centrés à l'origine, groupe des transformations affines qui laissent $\gamma(\mathbf{R})$ globalement fixe, tracé) ;

- étudier, lorsqu'un vélo à pignon fixe se déplace pendant une heure à vitesse constante, les trajectoires d'un point sur la bande de roulement du pneu de la roue avant, de l'axe de pédalier et de l'axe d'une pédale (géométrie du vélo : roues de 700 (périmètre de 2200 mm), pignon de 18, plateau de 36, axe de pédalier à 290 mm de hauteur et reculé de 580 mm de la verticale passant par l'axe de roue avant, manivelles de 175 mm, fréquence de pédalage de 80 tours par minute), et reprendre l'étude de la trajectoire de l'axe d'une pédale lorsque les dimensions du pignon et du plateau sont inversées ;
- étudier la longueur d'une courbe tracée sur une sphère de rayon 1 et qui débute au pôle sud sans jamais y repasser et qui évite le pôle nord, en particulier la comparer avec la longueur d'un morceau de méridien qui a les mêmes extrémités ;
- étudier l'existence d'un point elliptique sur une surface compacte en étudiant les courbures principales de la surface en un de ses points les plus éloignés de l'origine.

06/05. Dernier contrôle (15h-16h30 + 30 minutes pour tiers-temps).