Université de Rennes
UFR Mathématiques
2023-2024

L3 Mathématiques
Courbes et surfaces paramétrées

Contrôle continu 3 (90 minutes)

Tous les exercices ont la même valeur. Les réponses seront argumentées.

Exercice 1 Soit $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = \left(\dfrac{\cos(t)}{2+cos(\frac{3}{2}t)}, \dfrac{\sin(t)}{2+cos(\frac{3}{2}t)}\right)$. Tracer $\gamma(\mathbf{R})$ après avoir étudié γ (régularité, points multiples, points de tangence de $\gamma(\mathbf{R})$ avec des cercles centrés à l'origine, groupe des transformations affines qui laissent $\gamma(\mathbf{R})$ globalement fixe).

Exercice 2 On considère un vélo à pignon fixe ayant les caractéristiques suivantes : les roues ont un diamètre de 700 mm et un périmètre de 2200 mm ; le pignon compte 18 dents et le plateau 36 ; l'axe A du pédalier est à une hauteur de 290 mm et à une distance de 580 mm de la verticale passant par l'axe de roue avant ; les axes des pédales sont à une distance de 175 mm de l'axe du pédalier.
On suppose le vélo plan et on étudie son mouvement dans un plan muni de coordonnées euclidiennes (x, z). Le sol correspond à $z = 0$. À l'instant $t = 0$ le point de contact R de la roue avant avec le sol a pour coordonnées $(0, 0)$ et l'axe P d'une des pédales est en position haute. Le mouvement se fait selon les x croissants et sans glissement par rapport au sol. Ceci signifie que chaque fois qu'un point de la roue avant est en contact avec le sol la vitesse de ce point est nulle et ceci implique que lorsque la roue avant réalise k tours dans le sens horaire le vélo parcourt une distance positive de $k \times 2200$ mm. Pendant le mouvement qui dure 3600 secondes, le pédalier fait 80 tours par minute.
1. Faire un schéma du vélo à $t = 0$.
2. Calculer la vitesse (en km/h) à laquelle se déplace le vélo.
3. Donner les courbes paramétrés γ_A, γ_R et γ_P décrivant les mouvements des points A, R et P.
4. Étudier la régularité de γ_A, γ_R et γ_P en précisant les ensembles $\{\gamma'_A = 0\}$, $\{\gamma'_R = 0\}$ et $\{\gamma'_P = 0\}$.
5. Étudier la régularité de γ_P si le plateau possède 18 dents et le pignon 36.

Exercice 3 Soit $\beta_1 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbf{R}$ de classe C^1. On suppose $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$, $\beta(0) = -\frac{\pi}{2}$, $\beta(1) = \beta_1$ et $\beta(]0,1[) \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On note γ l'application de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = (\cos(\alpha(t))\cos(\beta(t)), \sin(\alpha(t))\cos(\beta(t)), \sin(\beta(t))).$$

1. Montrer que si $t \in [0,1]$ alors $||\gamma(t)||^2 = 1$ et $||\gamma'(t)||^2 = (\cos(\beta(t))\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2$.
2. Montrer

$$\int_0^1 ||\gamma'(t)||dt \geq |\beta_1 + \frac{\pi}{2}|$$

et qu'il y a égalité si et seulement si α est la fonction nulle et β est croissante.
3. Interpréter géométriquement ces résultats.

Exercice 4 *1.* Soit $f_i : U \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2$ deux fonctions de classe C^2 définies sur un ouvert U contenant l'origine de $\mathbf{R}^2$ et de la forme $f_i(x, y) = a_i x^2 + b_i y^2 + (x^2 + y^2)\varepsilon_i(x, y)$ avec $\varepsilon_i : U \to \mathbf{R}$ vérifiant $\lim\limits_{(0,0)} \varepsilon_i = 0$. Si $i = 1, 2$ on note S_i le graphe de f_i.
1.a. On suppose que $f_1 \leq f_2 \leq 0$. Montrer que $a_1 \leq a_2 \leq 0$, $b_1 \leq b_2 \leq 0$.
1.b. Vérifier que $P = (0, 0, 0) \in S_1 \cap S_2$ et que les courbures de Gauss $K(S_1, P)$ et $K(S_2, P)$ vérifient $K(S_1, P) \geq K(S_2, P)$.
2. Soit S une surface régulière, de classe au moins C^2 et compacte de $\mathbf{R}^3$. On fixe un point A de $\mathbf{R}^3$.
2.a. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $S \cap \{||\overrightarrow{AM}|| = R\}$ est non vide mais $S \cap \{||\overrightarrow{AM}|| > R\}$ le soit.
2.b. Soit $P \in S \cap \{||\overrightarrow{AM}|| = R\}$. Montrer, en utilisant les résultats de 1. que la courbure de Gauss de S en P est supérieure ou égale à R^{-2}.