Université de Rennes — L3 Mathématiques

UFR Mathématiques — Courbes et surfaces paramétrées

2023-2024

Contrôle continu 2 (1 heure)

Le barème donné est indicatif.

Les réponses seront argumentées.

Exercice 1 (5pts) Soit $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ définie par $\gamma(t) = \left(\frac{3}{5}\cos(t), \frac{3}{5}\sin(t), \frac{4t}{5}\right)$.

1. Vérifier que la paramétrisation est une paramétrisation par l'abscisse curviligne.

2. Calculer le repère de Serret-Frénet de γ en $t = 0$.

3. Calculer la courbure et la torsion de γ en $t = 0$.

Exercice 2 (8pts) Soit γ définie par $\gamma(t) = (\sin(2t)\cos(t), \sin(2t)\sin(t))$ si $t \in [0, 2\pi]$.

1. Montrer que γ est une courbe paramétrée régulière de $\mathbf{R}^2$.

2. Vérifier $\gamma([0, 2\pi]) = S(\gamma([0, 2\pi]))$ où $S(x, y) = (x, -y)$.

3. Vérifier $\gamma([0, 2\pi]) = R(\gamma([0, 2\pi]))$ où $R(x, y) = (-y, x)$.

4. Rechercher les points "multiples" de $\gamma([0, 2\pi])$.

5. Rechercher les points de tangence de $\gamma([0, 2\pi])$ avec les cercles centrés à l'origine.

6. Tracer $\gamma([0, 2\pi])$.

Exercice 3 (3pts) Soit $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ définie par $\phi(r, t) = (r\cos(t), r\sin(t), r)$.

1. Calculer $df(r, t)$ si $(r, t) \in \mathbf{R}^2$.

2. Déterminer le rang de f en $(r, t) \in \mathbf{R}^2$.

Exercice 4 (4pts) Soit $S = \{3(x + z)^2 + (x - z)^2 + y^2 = 12\}$.

1. Montrer que S est une surface régulière.

2. Rechercher les points M de S tels que le plan tangent $T_M S$ à $T_M S = \ker(dz)$.