Université de Rennes
UFR Mathématiques

L3 Mathématiques
Courbes et surfaces paramétrées

2023-2024

Contrôle continu 1 (1 heure)

Le barème donné est indicatif.

Les réponses seront argumentées.

1. (4 pts) Donner les définitions d'une courbe paramétrée de classe C^k et de la continuité uniforme d'une fonction réelle de la variable réelle.

2. (4 pts) Calculer la longueur d'arc de courbe paramétrée $\mathsf{longueur}(\gamma, a, b)$ avec $a, b \in \mathbf{R}$ et γ définie par $\gamma(t) = (3\cos(t), 3\sin(t), 4t)$ si $t \in \mathbf{R}$.

3. (6 pts) Étudier et tracer la courbe paramétrée donnée par

$$\begin{cases} x(t) &= \cos(2t) + 2\sin(t) \\ y(t) &= \cos(t) \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbf{R}.$$

On pourra en particulier prouver que la courbe est régulière et montrer la symétrie du tracé par rapport à l'axe Ox et l'existence de tangentes verticales et horizontales.

4. (6 pts) Soit $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (t, 3t^2, 6t^3)$.

a/ Montrer que $\gamma(t) \in \mathbf{N}^3$ si et seulement si $t \in \mathbf{N}$.

b/ Calculer la longueur d'arc de courbe paramétrée $\mathsf{longueur}(\gamma, 0, t)$ pour $t \geq 0$.

c/ Montrer que si $t \in \mathbf{N}$ alors $\mathsf{longueur}(\gamma, 0, t) \in \mathbf{N}$.

d/ Montrer qu'il existe $t \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{Q}$ tel que $\mathsf{longueur}(\gamma, 0, t) \in \mathbf{N}$.