

## Courbes et surfaces paramétrées

### Parcours Maths pour l'enseignement secondaire

#### Résumé des séances

*Version provisoire du 17 avril 2023*

**05/01.** Dans un premier temps on précise l'organisation de l'évaluation, les références bibliographiques qui ont permis de construire le cours, une liste de prérequis.

Il est indiqué que l'évaluation sera réalisée en trois contrôles d'une heure et donnant les notes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ , chacune sur 20, et un contrôle de deux heures et donnant la note  $C_4$ , sur 20 également. La note finale  $F$  est donnée par la formule

$$F = \max\left(\frac{(C_1 + C_2 + C_3) - \min(C_1, C_2, C_3)}{2}; C_4\right).$$

Les contrôles d'une heure auront lieu pendant les cours prévus les 3 février, 10 mars et 7 avril et le dernier contrôle, de deux heures, aura lieu le 3 mai.

Les références bibliographiques mentionnées sont :

- M. Audin, Géométrie, EDP Sciences, 2006

- M. Baker, Cours sur les courbes et surfaces paramétrées (et TD)
- M. Berger et B. Gostiaux, Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces, PUF, 1987
- E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, Cours de mathématiques spéciales, Masson, 1981
- Wikipedia

Les prérequis évoqués sont

- l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, vecteurs, dimension, applications linéaires, rang, déterminant, produit scalaire, norme, norme euclidienne...), la géométrie affine (espaces affines, points, translation, convexité...), la géométrie affine euclidienne (distance associée à une norme euclidienne) ;
- le calcul différentiel en dimension finie, l'analyse de base dans  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{R}^n$  et la topologie (continuité, différentiabilité, compacts, fermés, ouverts, connexes, connexité par arc, théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites...).

Il est expliqué en quoi la notion d'orientation est une notion d'algèbre linéaire (lorsque le corps de base est  $\mathbf{R}$ ) et il est montré qu'un espace vectoriel réel de dimension finie possède deux orientations exactement.

Les notions de groupe, anneau et corps (commutatifs ou pas) sont évoquées et des exemples de telles structures sont citées ( $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$ , le corps des quaternions,  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , les groupes de permutations, les groupes  $GL_n(\mathbf{R})$ ,  $SL_n(\mathbf{R})$ , l'anneau des polynômes à coefficients réels...).

Dans un second temps la notion de courbe paramétrée (courbe, arc, chemin) est introduite et il est expliqué comment on peut changer de paramétrisation d'une courbe.

Deux exemples de courbes paramétrées sont donnés, celui d'une paramétrisation

affine d'une droite du plan passant par deux points distincts donnés et celui de la paramétrisation angulaire du cercle unité.

Il est signalé à l'aide de l'exemple de la fonction qui à  $x$  réel associe  $x^3$  qu'une application peut être une fonction dérivable et bijective de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  sans que sa réciproque soit dérivable (l'exemple de la fonction  $x$  donne  $x^2$  est un exemple de même nature de  $[0, +\infty)$  dans  $[0, +\infty)$ ).

**06/01.** La séance débute par une petite discussion autour de la notion de structure au cours de laquelle est expliqué que d'un point de vue ensembliste  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}^n$ ,  $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$  sont les *mêmes* ensembles puisqu'ils ont même cardinal. C'est l'occasion de rappeler qu'un cardinal c'est la famille de tous les ensembles qui sont en bijection. On explique aussi que quand on étudie des objets ayant le même type de structure (ensemble, groupe, anneau, corps, espace vectoriel, espace topologique, dérivabilité...) pour les comparer on utilise les morphismes qui sont les applications qui conservent la structure considérée, et celles d'entre elles qui sont des bijections dont les réciproques conservent aussi la structure sont des isomorphismes.

Ensuite, après avoir précisé les définitions de courbe paramétrée (arc/chemin paramétré), de courbe géométrique (arc/chemin géométrique), de paramétrisation d'une courbe géométrique on définit ce qu'est une courbe paramétrée régulière  $\gamma$  et on définit ce qu'est le vecteur tangent et la tangente à la courbe géométrique associée au point  $\gamma(t)$ . On attire l'attention sur le fait que s'il existe  $t_1 \neq t_2$  tels que  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$  (i.e.  $\gamma$  non injective) alors il se peut que  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ .

On explique pourquoi les graphes de fonctions continues sont des courbes paramétrées continues et les graphes de fonctions  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , sont des courbes paramétrées  $C^k$  et régulières. On explique aussi pourquoi la tangente d'un graphe de

fonction  $C^k$  en un de ses points au sens classique coïncide avec la tangente de la courbe paramétrée correspondante.

On étudie en détail la courbe paramétrée  $\gamma$  donnée par

$$\gamma(t) = (\cos(t), 2 \sin(t) - \tan(t)) \text{ si } t \in ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

On achève la séance en donnant la définition de la longueur d'un arc de courbe paramétrée  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$  comme étant l'intégrale suivante :

$$\text{longueur}(\gamma, a, b) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

On affirme (sans preuve) que cette longueur est égale à la limite suivante :

$$\text{longueur}(\gamma, a, b) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \|\overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})}\|$$

$t_i = a + \frac{i}{N}(b - a)$  si  $i \in \{0, \dots, N - 1\}$ . On indique que la preuve de ce résultat repose sur le théorème de Heine et on explique à l'aide d'un dessin que la somme

$$\sum_{i=0}^{N-1} \|\overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})}\|$$

est la longueur d'une ligne polygonale reliant les point  $\gamma(t_i)$ ,  $i \in \{0, \dots, N\}$  de la courbe géométrique  $\gamma(I)$ .

**13/01.** Dans un premier temps les courbes paramétrées qui à  $t \in ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  associent  $(\cos(t), R \sin(t) - \tan(t))$  sont visualisées à l'aide de GeoGebra. Ceci permet de faire apparaître un phénomène particulier lorsque  $R = 1$  (paramètre pour lequel la courbe n'est pas régulière et qui donne une cuspide).

Dans un second temps on calcule les longueurs des arcs associés aux courbes

données par  $t \in [0, 5] \mapsto (t, t^{\frac{3}{2}})$ ,  $t \in [0, T] \mapsto (\cos(t), \sin(t), \lambda t)$  (hélice) et  $t \in [0, 1] \mapsto (t, t^2)$  (parabole). Le cas de l'hélice permet d'expliquer qu'un cylindre est isométrique à un morceau de plan euclidien comme un cône d'ailleurs (ou presque). L'étude de l'arc de parabole contient une étude préalable de trigonométrie hyperbolique (définition du sinus hyperbolique et du cosinus hyperbolique, calcul de leurs dérivées, démonstrations de quelques formules ( $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ ,  $\sinh(2t) = 2 \sinh(t) \cosh(t)$ ), calcul de la réciproque  $\sinh^{-1}$  de la fonction sinus hyperbolique).

La séance se termine avec une présentation rapide de la courbe de Peano qui est une courbe paramétrée de classe  $C^0$ , c'est à dire seulement continue, qui envoie le segment  $[0, 1]$  surjectivement sur le carré plein  $[0, 1]^2$ .

**20/01.** La séance est entièrement consacrée à la preuve détaillée du résultat suivant :

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  une courbe paramétrée de classe  $C^1$  et soit  $a, b \in I$  avec  $a < b$ .

Alors la longueur  $\text{longueur}(\gamma, a, b)$  qui est définie par

$$\text{longueur}(\gamma, a, b) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

vérifie

$$\text{longueur}(\gamma, a, b) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{\|\gamma(a + \frac{k}{n}(b-a)) \gamma(a + \frac{k+1}{n}(b-a))\|}.$$

La preuve suit le schéma suivant (en faisant un usage du produit scalaire que le schéma n'explique pas).

Dans un premier temps on montre que si  $n \in \mathbf{N}^*$  et si  $k = 0, \dots, n-1$  alors

$$\overrightarrow{\|\gamma(a + \frac{k}{n}(b-a))\gamma(a + \frac{k+1}{n}(b-a))\|} \leq \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} \|\gamma'(t)\| dt.$$

En sommant sur  $k = 0, \dots, n-1$  et en utilisant la relation de Chasles il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{\|\gamma(a + \frac{k}{n}(b-a))\gamma(a + \frac{k+1}{n}(b-a))\|} \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Dans un deuxième temps on montre que si  $n \in \mathbf{N}^*$  et si  $k = 0, \dots, n-1$  et si on pose  $a_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ ,  $a_{k+1} = a + \frac{k+1}{n}(b-a)$ ,  $\|\gamma'(t)\| = \|\gamma'(a_k)\| \pm r_k(t)$  et  $\gamma'(t) = \gamma'(a_k) \pm R_k(t)$  alors

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \|\gamma'(t)\| dt \leq \overrightarrow{\|\gamma(a_k)\gamma(a_{k+1})\|} + \int_{a_k}^{a_{k+1}} |r_k(t)| dt + \int_{a_k}^{a_{k+1}} \|R_k(t)\| dt.$$

Dans un troisième temps, par un argument de continuité uniforme, on montre que si  $\varepsilon > 0$  il existe un entier  $N \in \mathbf{N}$  tel que si  $n \in \mathbf{N}$  vérifie  $n \geq N$  alors pour tout  $k = 0, \dots, n-1$  et quels que soient  $t, t' \in [a_k, a_{k+1}]$  on a

$$\|\|\gamma'(t)\| - \|\gamma'(t')\|\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ et } \|\gamma'(t) - \gamma'(t')\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

qui implique, en prenant  $t' = a_k$ ,  $|r_k(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  et  $\|R_k(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  et donc par intégration

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \|\gamma'(t)\| dt \leq \overrightarrow{\|\gamma(a_k)\gamma(a_{k+1})\|} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(a_{k+1} - a_k) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(a_{k+1} - a_k)$$

c'est à dire

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \|\gamma'(t)\| dt \leq \overrightarrow{\|\gamma(a_k)\gamma(a_{k+1})\|} + \frac{\varepsilon}{(b-a)}(a_{k+1} - a_k).$$

En sommant sur  $k = 0, \dots, n - 1$  et en utilisant la relation de Chasles il vient

$$\int_{a_0}^{a_n} \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|\overrightarrow{\gamma(a_k)\gamma(a_{k+1})}\| + \frac{\varepsilon}{(b-a)} \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$$

pour  $n \geq N$ .

Puisque  $a_0 = a$ ,  $a_n = b$  et que  $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = (b - a)$  on a donc

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|\overrightarrow{\gamma(a_k)\gamma(a_{k+1})}\| + \varepsilon$$

pour  $n \geq N$ , c'est à dire

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|\overrightarrow{\gamma(a + \frac{k}{n}(b-a))\gamma(a + \frac{k+1}{n}(b-a))}\| + \varepsilon$$

pour  $n \geq N$ .

En combinant ce résultat avec l'inégalité obtenue lors de la première étape on obtient que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $N \in \mathbf{N}^*$  tel que si  $n \in \mathbf{N}$  vérifie  $n \geq N$  alors

$$\left| \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - \sum_{k=0}^{n-1} \|\overrightarrow{\gamma(a + \frac{k}{n}(b-a))\gamma(a + \frac{k+1}{n}(b-a))}\| \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci signifie bien que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \|\overrightarrow{\gamma(a + \frac{k}{n}(b-a))\gamma(a + \frac{k+1}{n}(b-a))}\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

comme annoncé.

En fin de séance il a été dit que des indications sur le sujet du premier contrôle seraient données. Les voici. Dans ce contrôle d'une heure programmé le matin du 3 février il sera demandé

1/ (5 pts) Définitions d'une courbe paramétrée de classe au moins  $C^1$ , d'un vecteur

tangent à une telle courbe paramétrée, de la longueur d'un arc de courbe paramétrée de classe au moins  $C^1$ .

2/ (5 pts) Calcul de la longueur d'un segment de droite de  $\mathbf{R}^n$ , calcul de la longueur d'un arc de cercle en utilisant la définition de la longueur d'un arc de courbe paramétrée de classe au moins  $C^1$ .

3/ (5 pts) Calcul de la longueur d'un morceau du graphe du cosinus hyperbolique.

4/ (5 pts) Étude et tracé de la courbe paramétrée donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \times \frac{9\pi^2}{9\pi^2 - 4t^2} \\ y(t) = \sin(t) \times \frac{9\pi^2}{9\pi^2 - 4t^2} \end{cases} \text{ avec } t \in ]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[.$$

On pourra en particulier prouver que la courbe est régulière et montrer la symétrie du tracé par rapport à l'axe  $Ox$  et l'existence d'au moins un point double et d'une droite asymptote).

**03/02.** (deux séances) La première partie de la séance du matin est consacrée au contrôle continu. La seconde partie permet d'aborder la notion d'abscisse curviligne et de montrer qu'une courbe paramétrée de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$  est  $C^k$

équivalente à une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne et de classe  $C^k$ .

En introduction à la seconde séance la notion de fonce est présentée. C'est l'occasion de tracer la surface  $z = \frac{x^3}{3} + xy$ , d'étudier sa section par des plans  $y = cte$  et sa projection sur le plan  $Oyz$ .

Lors de la seconde séance est définie la courbure d'une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne et il est montré que pour une telle courbe, la dérivée seconde de la courbe paramétrée est constamment orthogonale à sa dérivée premier.

Un rappel sur la notion de différentielle d'une application numérique est fait et il est



calculé sur des exemples des différentielles et leur action sur des vecteurs.

On introduit aussi la notion d'application de Gauss (celle qui est donnée et dite trafiquée car on s'intéresse aux vecteurs unitaires tangents plutôt que normaux). Il est expliqué heuristiquement combien tourne le vecteur unitaire tangent lorsqu'on parcourt une courbe fermée. On évoque succinctement l'utilisation de l'application de Gauss pour établir le théorème de D'Alembert.

Il est montré que la courbure d'un cercle est, en chacun de ses points, l'inverse de son rayon.

**10/02.** On rappelle la notion de courbure et on introduit celle de courbure algébrique. On introduit aussi la notion de repère de Frénet. C'est l'occasion de dire quelques mots sur l'orientation d'un espace vectoriel de dimension finie et de donner des exemples de bases directes et indirectes de  $\mathbf{R}^2$  munie de sa structure euclidienne canonique et de l'orientation donnée par la base canonique  $((1, 0), (0, 1))$ .

On indique que le vecteur  $\gamma''(t)$ , lorsqu'il n'est pas nul, détermine la partie convexe bordée par  $\gamma(J)$  avec  $J$  intervalle suffisamment petit contenant  $t$  et que l'annulation de la courbure  $K(t)$  permet de localiser les points d'inflexion de la courbe tracée.

On donne les expressions de  $\gamma'(t)$ ,  $\vec{n}(t)$ ,  $\gamma''(t)$ ,  $K(t)$  en fonction de

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$  lorsque  $\gamma$  est une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne et de classe au moins 2. On énonce une proposition qui dit que la courbure  $K(t)$  est, à  $t$  fixé, l'inverse de l'unique  $r(t)$  tel que que l'application qui à  $(s, r)$  associe  $\gamma(s) + r\vec{n}(s)$  est singulière.

Durant la séance on établit aussi que  $\det_b(u, v) = \sin(u, v) \cdot \|u\| \cdot \|v\|$  si  $u, v \in \mathbf{R}^2$  euclidien orienté de tel sorte que la base canonique  $b$  de  $\mathbf{R}^2$  soit orthonormé directe.

Il est signalé qu'un sinus d'un couple de vecteurs de  $\mathbf{R}^2$  peut-être négatif alors que

ce n'est pas le cas dans  $\mathbf{R}^3$  lorsqu'on essaie de définir le sinus de deux vecteurs.

**17/02.** Au cours de la séance on donne la définition de courbe birégulière et on introduit la notion de repère de Serret-Frénet. On expose quelques propriétés du produit vectoriel de deux vecteurs de  $\mathbf{R}^3$  ou de deux fonctions vectorielles, à valeurs dans  $\mathbf{R}^3$  et de classe  $C^1$ . On définit la courbure et la torsion d'une courbe de  $\mathbf{R}^3$ , de classe au moins  $C^3$ , paramétré par l'abscisse curviligne et birégulière. Il reste à établir le calcul des dérivées des vecteurs  $\vec{n}(t)$  et  $\vec{b}(t)$ .

Quelques indications sont données sur le prochain contrôle. Les voici rappelées et précisées. Il pourra être demandé au plus de répondre aux questions suivantes.

A/ (4 pts) Énoncer et prouver la règle de L'Hôpital dans le cas de deux fonctions  $f$  et  $g$  qui tendent vers 0 lorsque la variable tend par la droite vers un réel donné.

B/ (4 pts) Étudier le folium de Descartes donné par

$$t \in \mathbf{R} \setminus \{-1\} \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

On pourra en particulier étudier la régularité de cette courbe paramétrée  $\gamma$ , son comportement asymptotique quand  $t$  tend vers  $-\infty$ ,  $-1$  et  $+\infty$ , et montrer que le tracé  $\Gamma$  est égal à l'ensemble d'équation cartésienne  $x^3 + y^3 = 3xy$ .

C/ (4 pts) On considère la spirale logarithmique donnée par

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \exp(t) \cos(t) \\ y(t) = \exp(t) \sin(t). \end{cases}$$

On pose  $\Gamma = \gamma(\mathbf{R})$ .

1. Donner le vecteur tangent à  $\gamma$  en  $t \in \mathbf{R}$  et montrer que  $\gamma$  est régulière.

2. Donner la courbure de  $\gamma$  en  $t \in \mathbf{R}$  (il s'agit de la courbure en  $s$  tel que  $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$  d'une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne  $\tilde{\gamma}$  définissant la même courbe géométrique que  $\gamma$  et liée à  $\gamma$  par un difféomorphisme croisant).
3. Montrer que si  $t, s \in \mathbf{R}$  il existe une et une seule application linéaire  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  que l'on explicitera telle que  $f(\Gamma) = \Gamma$  et  $f(\gamma(t)) = \gamma(s)$ .
4. Tracer  $\Gamma$ .

D/ (4 pts) Montrer que la courbe paramétrée  $\gamma$  définie par

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3. \end{cases}$$

est une courbe régulière de classe  $C^\infty$  et que  $\Gamma = \gamma(\mathbf{R})$  n'est incluse dans aucun plan affine de  $\mathbf{R}^3$ .

E/ (4 pts) Montrer que l'hélice  $\gamma$  définie par

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) \begin{cases} x(t) = \cos(\frac{1}{\sqrt{2}}t) \\ y(t) = \sin(\frac{1}{\sqrt{2}}t) \\ z(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}t. \end{cases}$$

est une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne, régulière, de classe  $C^\infty$  et dont la courbure et la torsion en  $t = 0$  valent  $\frac{1}{2}$ .

**03/03.** En début de séance deux solutions à l'exercice D du projet de contrôle sont données.

Ensuite on passe le reste de la séance à essayer de résoudre la question 3 de l'exercice C de ce projet de contrôle. Il s'agit de montrer qu'il existe une et une seule application linéaire qui fixe globalement une spirale logarithmique et qui envoie un

point donné de cette spirale sur un autre point donné appartenant également à cette spirale.

On procède en plusieurs étapes.

La première étape consiste à montrer que si  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  est linéaire il existe une base orthonormale directe  $(v, w)$  telle que  $f(v)$  et  $f(w)$  sont orthogonaux, c'est à dire telle que le produit scalaire  $\langle f(v), f(w) \rangle$  est nul. Pour obtenir ce résultat on considère la famille  $(v(t), w(t))_{t \in \mathbf{R}}$  de bases orthonormales directes définies par  $v(t) = (\cos(t), \sin(t))$  et  $w(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ . On note  $\Psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction définie par  $\Psi(t) = \langle f(v(t)), f(w(t)) \rangle$ . C'est une fonction continue. On observe que  $v(\frac{\pi}{2}) = w(0)$  et que  $w(\frac{\pi}{2}) = -v(0)$ . Ceci nous permet de montrer, en utilisant la linéarité de  $f$  et la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, que  $\Psi(\frac{\pi}{2}) = -\Psi(0)$ . Par conséquent, soit  $\Psi(0) = 0$  et la base  $(v, w) = (v(0), w(0))$  est solution, soit  $\Psi(0) \neq 0$ . Dans ce cas  $\Psi(0)$  et  $\Psi(\frac{\pi}{2})$  sont de signes opposés et donc, en raison du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue  $\Psi$  qui prend des signes différents en 0 et  $\frac{\pi}{2}$  s'annule en un  $t_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . On a ainsi  $\langle f(v(t_0)), f(w(t_0)) \rangle = 0$ , ceci signifie que  $f(v(t_0))$  et  $f(w(t_0))$  sont orthogonaux. Le couple  $(v, w) = (v(t_0), w(t_0))$  est bien la base orthonormale recherchée :  $f(v)$  et  $f(w)$  sont orthogonaux.

La deuxième étape (qui peut être la première) consiste à montrer, si  $t, s \in \mathbf{R}$ , qu'il existe  $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  linéaire telle que  $g(\Gamma) = \Gamma$  et  $g(\gamma(t)) = \gamma(s)$ . En observant que si on identifie  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{C}$  il vient  $\gamma(t) = \exp(t + it)$  et donc que

$\gamma(s) = \exp((s - t) + i(s - t))\gamma(t)$  et, si  $u \in \mathbf{R}$ ,

$\exp((s - t) + i(s - t))\gamma(u) = \gamma(s - t + u)$ , on en déduit que la similitude directe

$g_\lambda$  de matrice  $\exp(\lambda) \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \\ \sin(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix}$  avec  $\lambda = s - t$  vérifie  $g_\lambda(\gamma(t)) = \gamma(s)$

et  $g_\lambda(\Gamma) = \Gamma$ .

La troisième étape consiste à remarquer que les similitudes directes  $g_\lambda$  avec  $\lambda \in \mathbf{R}$  vérifient  $g_{\lambda_1} \circ g_{\lambda_2} = g_{\lambda_1 + \lambda_2}$  si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ ,  $g_\lambda(\gamma(r)) = \gamma(r + \lambda)$  si  $r, \lambda \in \mathbf{R}$  et une et une seule vérifie  $g_\lambda(\gamma(t)) = \gamma(s)$  si  $t, s \in \mathbf{R}$ .

La quatrième étape consiste à considérer  $t, s \in \mathbf{R}$ ,  $\lambda = s - t$ ,  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  une application linéaire telle que  $f(\gamma(t)) = \gamma(s)$  et  $f(\Gamma) = \Gamma$  et à montrer qu'alors  $f$  est égale à la similitude directe  $g_\lambda$  définie dans la troisième étape. Soit la base orthonormée directe  $(v, w)$  qui vérifie  $\langle f(v), f(w) \rangle = 0$  et dont l'existence est établie dans la première étape. Il existe  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  tel que  $(v, w) = (v(\alpha), w(\alpha))$  et  $f(\gamma(\alpha)) = \gamma(\beta)$ . On pose  $h = g_{-\beta} \circ f \circ g_\alpha$ . On va montrer que  $h$  est l'identité. Ceci impliquera que  $f = g_\beta \circ g_{-\alpha} = g_{\beta - \alpha}$  et donc établira que  $f$  est bien la similitude directe  $g_\lambda$  définie dans la troisième étape. On a

$$\begin{aligned}
 h(\gamma(0)) &= (g_{-\beta} \circ f \circ g_\alpha)(\gamma(0)) \\
 &= (g_{-\beta} \circ f)(g_\alpha(\gamma(0))) \\
 &= (g_{-\beta} \circ f)(\gamma(\alpha)) \\
 &= g_{-\beta}(f(\gamma(\alpha))) \\
 &= g_{-\beta}(\gamma(\beta)) \\
 &= \gamma(0).
 \end{aligned}$$

On a aussi  $g_\alpha(\gamma(0)) = \gamma(\alpha) = \exp(\alpha)v$  et  $g_\alpha(\gamma(\frac{\pi}{2})) = \gamma(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \exp(\alpha + \frac{\pi}{2})w$ .

Par conséquent  $f(g_\alpha(\gamma(0))) = \exp(\alpha)f(v)$  et  $f(g_\alpha(\gamma(\frac{\pi}{2}))) = \exp(\alpha + \frac{\pi}{2})f(w)$ . Or

$\langle f(v), f(w) \rangle = 0$  et donc  $\langle f(g_\alpha(\gamma(0))), f(g_\alpha(\gamma(\frac{\pi}{2}))) \rangle = 0$ . Puisque  $g_\beta$  est une

similitude, elle conserve l'orthogonalité. Par conséquent

$\langle g_\beta(f(g_\alpha(\gamma(0)))) , g_\beta(f(g_\alpha(\gamma(\frac{\pi}{2})))) \rangle = 0$  c'est à dire  $\langle h(\gamma(0)), h(\gamma(\frac{\pi}{2})) \rangle = 0$ .

Puisque  $h(\gamma(0)) = \gamma(0)$  et que  $\langle \gamma(0), \gamma(\frac{\pi}{2}) \rangle = 0$  il vient que  $h(\gamma(\frac{\pi}{2}))$  est colinéaire à  $\gamma(\frac{\pi}{2})$ . Il existe donc  $a \in \mathbf{R}$  tel que  $h(\gamma(\frac{\pi}{2})) = a\gamma(\frac{\pi}{2})$ . Puisque  $h(\gamma(0)) = \gamma(0)$ , pour montrer que  $h$  est l'identité il suffit de montrer que  $a = 1$ .  
L'application  $h$  vérifie  $h(x, y) = (x, ay)$  et  $\gamma$  vérifie

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \exp(t) \cos(t) \\ y(t) = \exp(t) \sin(t). \end{cases}$$

Par conséquent  $\tilde{\gamma} = h \circ \gamma$  vérifie

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) = \exp(t) \cos(t) \\ \tilde{y}(t) = a \exp(t) \sin(t). \end{cases}$$

On a donc, si  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = \exp(t)(\cos(t) - \sin(t)) \\ y'(t) = \exp(t)(\sin(t) + \cos(t)) \end{cases}$$

et

$$\tilde{\gamma}'(t) = \begin{cases} \tilde{x}'(t) = \exp(t)(\cos(t) - \sin(t)) \\ \tilde{y}'(t) = a \exp(t)(\sin(t) + \cos(t)). \end{cases}$$

Puisque  $h(\Gamma) = \Gamma$  et que  $\tilde{\gamma}(0) = h(\gamma(0)) = \gamma(0)$ , les vecteurs tangents  $\gamma'(0)$  de  $\gamma$  en 0 et  $\tilde{\gamma}'(0)$  de  $\tilde{\gamma}$  en 0 sont colinéaires. Or  $\gamma'(0) = (1, 1)$  et  $\tilde{\gamma}'(0) = (1, a)$ . Par conséquent la colinéarité de  $\gamma'(0) = (1, 1)$  et  $\tilde{\gamma}'(0) = (1, a)$  implique  $a = 1$ .

**10/03.** La première partie de la séance du matin est consacrée au contrôle continu.

La seconde partie permet de débiter la partie du cours sur les surfaces. Il est indiqué qu'on travaillera presque systématiquement dans  $\mathbf{R}^n$ . La notion de sous-variété de  $\mathbf{R}^n$  est introduite. Le point de vue adopté est celui qui consiste à dire qu'un

sous-ensemble  $V$  de  $\mathbf{R}^n$  est une sous-variété de dimension  $p$  et de classe  $C^k$  de  $\mathbf{R}^n$  si pour tout point  $a$  de  $V$

(\*) il existe un ouvert  $U$ , un repère affine  $\mathcal{R}$  d'origine  $a$ , un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^p$  et une application  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{n-p}$  de classe  $C$  telle que si les points de  $\mathbf{R}^n$  sont identifiés à leurs coordonnées dans le repère  $\mathcal{R}$  alors  $U \cap V$  est égal au graphe  $\mathcal{G}_f$  de  $f$  c'est à dire

$$V \cap U = \{(x', x'' = f(x')) \mid x' \in \mathbf{R}^p\}.$$

On donne les exemples du cercle unité  $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  et de la sphère unité  $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . On traite en détail l'exemple du cercle. On explique pourquoi il suffit de vérifier (\*) pour des  $a_i \in V, i \in I$  tels que  $V \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ . En marge de la définition de sous-variété on revient sur la définition de graphe et on donne quelques exemples "graphiques" de graphes de correspondance, de fonction, d'application, injective ou pas, surjective ou pas, bijective ou pas, continue ou pas (dans le cas de la dimension un).

**17/03.** On consacre la séance à donner une démonstration de la règle de L'Hôpital dans le cas de deux fonctions  $f$  et  $g$  qui tendent vers 0 lorsque la variable tend par la droite vers un réel  $a$  donné :

*Soit  $a \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0, f, g : ]a, a + \varepsilon[ \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions dérivables qui tendent vers 0 lorsque la variable tend par la droite vers  $a$ . On suppose aussi que  $g'$  ne s'annule pas et qu'il existe  $l \in \mathbf{R}$  tel que la fonction  $\frac{f'}{g'}$  tende vers  $l$  lorsque la variable tend par la droite vers  $a$ . Alors  $g$  ne s'annule pas et la fonction  $\frac{f}{g}$  tend aussi vers  $l$  lorsque la variable tend par la droite vers  $a$ .*

La preuve qu'on donne utilise le théorème des accroissements finis généralisé :

*Soit  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbf{R}$  avec  $\alpha < \beta, f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions continues. On*

suppose que les restrictions de  $f$  et  $g$  à  $] \alpha, \beta [$  sont dérivables et que  $g'$  ne s'annule jamais. Alors  $g(\beta) \neq g(\alpha)$  et il existe  $\gamma \in ] \alpha, \beta [$  tel que

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}.$$

Ce résultat est démontré en utilisant le théorème de Rolle (et sa variante appelée parfois théorème des accroissements finis) :

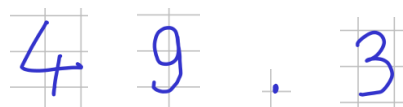
Soit  $a \in \mathbf{R}$  et  $b \in \mathbf{R}$  avec  $a < b$   $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue telle que  $f(a) = f(b)$ . On suppose que la restriction de  $f$  à  $]a, b[$  est dérivable. Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Le théorème de Rolle n'est pas prouvé.

Dans le cadre de l'élaboration de la preuve du théorème des accroissements finis généralisé on discute de l'importance des hypothèses (et des conclusions) d'un énoncé en analysant l'incidence du fait que  $g'$  ne s'annule jamais sur l'éventuelle non annulation et même non changement de signe de  $g$ .

En introduction à la séance un préliminaire de topologie et de géométrie différentielle est fait. Il est expliqué pourquoi aucune des quatre figures dessinées ci-dessous n'est homéomorphe à une des trois autres :



Il est aussi affirmé qu'il existe un difféomorphisme  $C^\infty$  de  $\mathbf{R}^2$  qui envoie la figure de gauche ci-dessous sur la figure qui est immédiatement à sa droite et un autre



difféomorphisme  $C^\infty$  de  $\mathbf{R}^2$  qui l'envoie sur la troisième :

49.3

64.3

63.4

Leur principe de construction sera expliqué dans une séance ultérieure.

Enfin, au cours de cette séance, l'importance d'un raisonnement solide pour convaincre mathématiquement est illustrée par la parabole du 49.3 : *une preuve pas assez étayée est un argument d'autorité qui n'est pas suffisant pour convaincre, en mathématiques comme ailleurs.*

Voici maintenant quelques pistes pour le prochain contrôle :

A/ Énoncé convaincant de la règle de L'Hôpital avec exemples illustrant l'importance des hypothèses.

B/ Énoncé et démonstration du théorème de Rolle.

C/ Dans chaque cas donner  $Z \subset S$  le plus petit possible pour que  $S \setminus Z$  soit une surface  $C^\infty$  de  $\mathbf{R}^3$  (les réponses seront justifiées et les surfaces seront esquissées) :

a)  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  ;

b)  $S = \{(t \cos(s), t \sin(s), t) | s, t \in \mathbf{R}\}$  ;

c)  $S = \{y^2 - z^3 = 0\}$  ;

d)  $S = \{(\cos(s) \cos(t), \sin(s) \cos(t), \sin(t)) | s, t \in \mathbf{R}\}$  ;

e)  $S = \{x^2 - y^2 + z^2 = 0\}$  ;

f)  $S = \{(\cos(s), \sin(s), t) | s, t \in \mathbf{R}\}$  ;

g)  $S = \{x^2 + y^2 z = 0\}$  ;

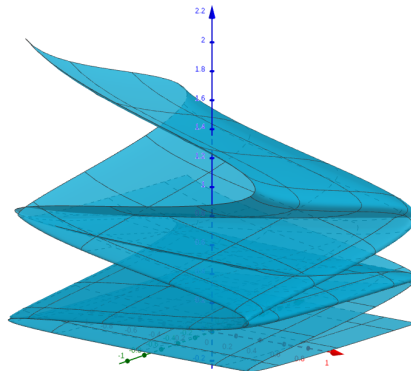
h)  $S = \{(\cos(s) - t \sin(s), \sin(s) + t \cos(s), t) | s, t \in \mathbf{R}\}$ .

D) Soit  $C = \{y^2 + z^2 = 1\}$  et  $E = \{x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$  deux sous-ensembles de  $\mathbf{R}^3$ . Étudier ces deux sous-ensembles de  $\mathbf{R}^3$  et leur intersection  $\Gamma = C \cap E$ .

**24/03.** On donne sans démonstration les caractérisations d'une surface de  $\mathbf{R}^3$  comme étant localement le lieu des zéros d'une fonction numérique différentiable de rang 1 définie sur un ouvert de  $\mathbf{R}^3$  et comme étant aussi localement l'image d'un ouvert de  $\mathbf{R}^2$  par une application différentiable de rang 2 et à valeurs dans  $\mathbf{R}^3$ .

Ensuite on étudie quelques exemples :

- les sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^n$  ;
- les sous-espaces affines de  $\mathbf{R}^n$  ;
- $\{ax^p + by^q + cz^r - d = 0\}$  avec  $a, b, c, d \in \mathbf{R}^*$ ,  $p, q, r \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$  ;
- l'image de  $\mathbf{R}^2$  par l'application  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par  $f(x, y, z) = (\cos(x), \cos(y), \exp(x^2 + y^2))$ .

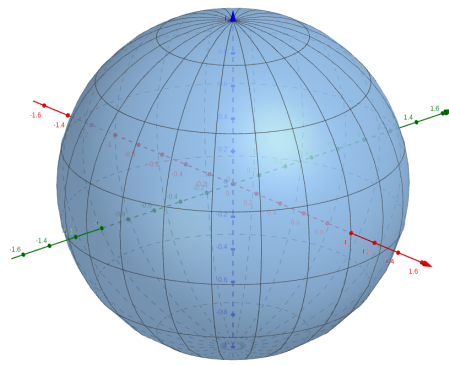


L'image de  $]0, 9[$  par  $(\cos(x), \sin(x), \exp(\frac{x^2+y^2}{144}) - 1)$  et GeoGebra.

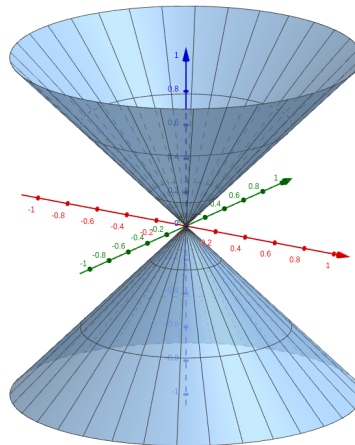
**31/03.**

On donne le tracé de quelques surfaces

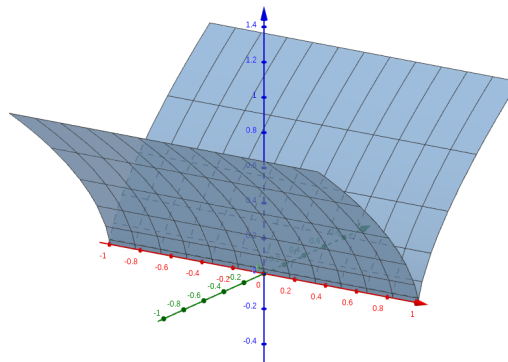
a)  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  est une surface :



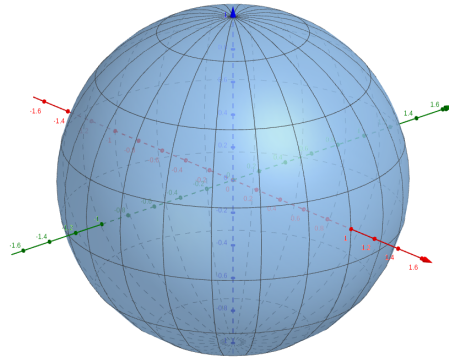
b)  $S = \{(t \cos(s), t \sin(s), t) | s, t \in \mathbf{R}\} \setminus \{O\}$  est une surface :



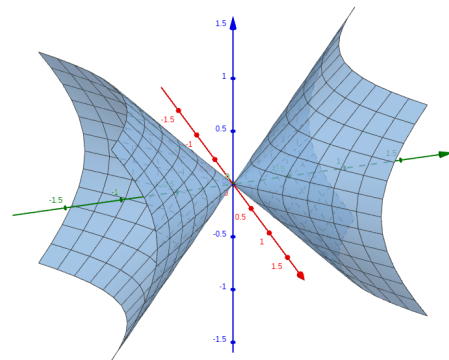
c)  $S = \{y^2 - z^3 = 0\} \setminus O_x$  est une surface :



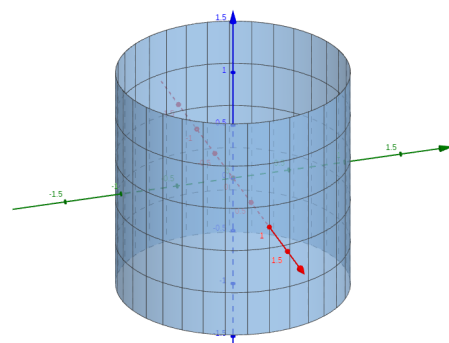
d)  $S = \{(\cos(s) \cos(t), \sin(s) \cos(t), \sin(t)) | s, t \in \mathbf{R}\}$  est une surface :



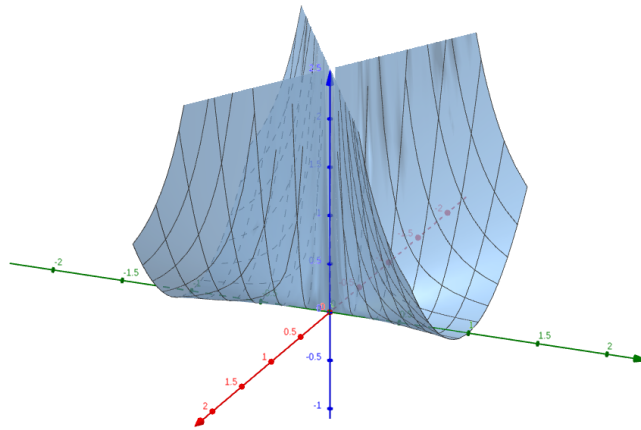
e)  $S = \{x^2 - y^2 + z^2 = 0\} \setminus \{O\}$  est une surface :



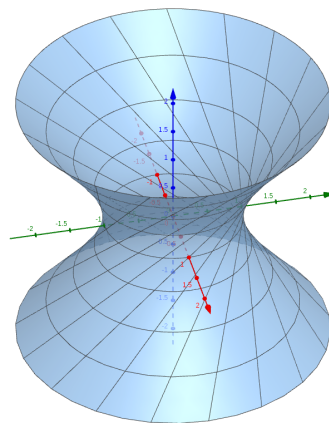
f)  $S = \{(\cos(s), \sin(s), t) | s, t \in \mathbf{R}\}$  est une surface :



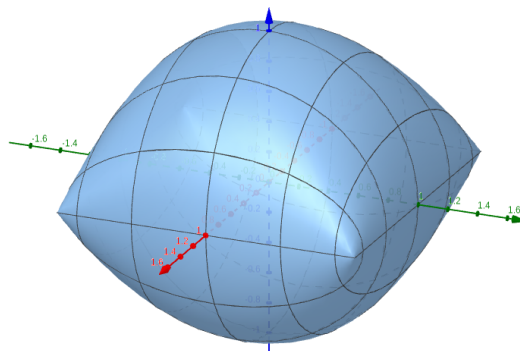
g)  $S = \{x^2 + y^2z = 0\} \setminus Oz$  est une surface :



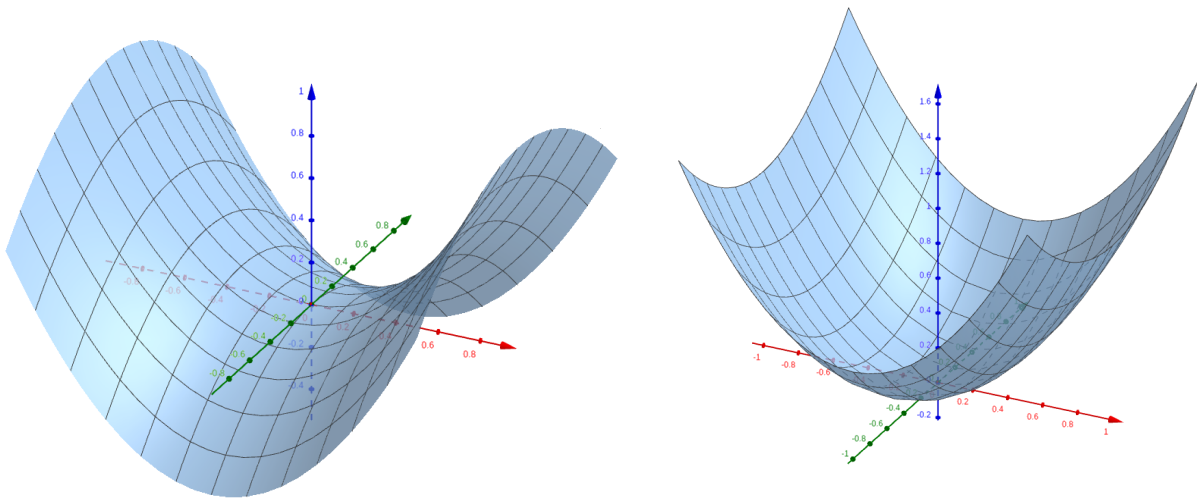
h)  $S = \{(\cos(s) - t \sin(s), \sin(s) + t \cos(s), t) | s, t \in \mathbf{R}\}$  est une surface :



i)  $S = \{(\cos(s), \cos(t), \sin(s) \sin(t)) | s, t \in \mathbf{R}\}$  privée des points  $(-1, -1, 0)$ ,  $(-1, 1, 0)$ ,  $(1, -1, 0)$  et  $(1, 1, 0)$  est une surface mais n'est pas un coussin :



j)  $S_1 = \{(x, y, x^2 - \frac{1}{2}y^2 | x, y \in \mathbf{R}\}$  et  $S_2 = \{(x, y, x^2 + \frac{1}{2}y^2 | x, y \in \mathbf{R}\}$  sont des surfaces :



Les trois premiers cas sont plus détaillés. On explique avec le premier cas comment trouver le plan tangent à une surface en un point. On explique dans le deuxième cas pourquoi le cône n'est pas une surface en l'origine : on raisonne par l'absurde en montrant que si c'était le cas nécessairement son plan tangent en l'origine serait de dimension trois, ce qui n'est pas possible.

En début de séance on construit à partir de la fonction qui est nulle en dehors de  $]0, 1[$  et qui vaut  $\exp(-1/x(1-x))$  dans  $]0, 1[$  une fonction plateau puis on construit une famille  $\phi_t$  de difféomorphismes  $C^\infty$  de  $\mathbf{R}^2$  qui préservent les aires et qui permettent de translater verticalement la bande  $]1, 2[ \times \mathbf{R}$  tout en fixant point par point  $(\mathbf{R} \setminus ]0, 3[) \times \mathbf{R}$ . On indique sans démonstration qu'une construction du même type permet d'obtenir une famille de difféomorphismes  $C^\infty$  de  $\mathbf{R}^2$  qui préservent les aires et qui permettent de faire tourner un disque tout en fixant point par point l'extérieur d'un second disque qui contient le premier.

**06/03.** On donne trois points de vue sur la description locale d'une surface de  $\mathbf{R}^3$  (graphe, comme lieu des zéros d'une fonction continument différentiable dont la

différentielle n'est jamais nulle (toujours de rang 1), comme image par une application continument différentiable de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}^3$  et dont la différentielle est toujours de rang 2).

On explique dans chacune des situations comment déterminer le plan tangent de la surface en un point.

À titre d'illustration on traite le cas de la sphère  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  pour laquelle on détermine le plan tangent au point  $a$  de coordonnées  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ .

**13/03.** Dans la première partie de la séance, une preuve complète du théorème de Rolle est donnée. Il est aussi expliqué pourquoi lorsqu'on donne de façon paramétrée une éventuelle surface il n'est pas suffisant de vérifier que l'application est de rang 2 pour conclure qu'on a une surface (problème d'injectivité).

La deuxième partie de la séance est consacrée à la seconde forme fondamentale d'une surface. Après l'avoir définie ainsi que les notions de courbures principale et de Gauss on traite quelques exemples (sphère, cylindre engendrée par une courbe plane et une droite perpendiculaire au plan contenant la courbe, graphe de  $ax^2 + by^2$ ). Le theorema egregium de Gauss et certaines de ses conséquences sont évoquées rapidement.

On introduit en fin de séance la notion d'application de Gauss d'une surface et on explique à l'aide d'un ruban de Möbius pourquoi elle n'est pas toujours définie.

**14/03.** On, débute la séance par la promotion du chocolat Lanvin ([https://fr.wikipedia.org/wiki/Lanvin\\_\(chocolat\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Lanvin_(chocolat))), bourguignon, comme le vin, la moutarde, le pain d'épices, le cassis, l'Époisses et les dérailleurs Simplex, en particulier par celle que Salvador Dali en avait fait dans les années soixante-dix (<https://www.ina.fr/ina-eclaire-actu/video/i12173465/>)

salvador-dali-je-suis-fou).

Ceci permet d'introduire les toiles que le peintre catalan dédie à René Thom ([https://fr.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9\\_Thom](https://fr.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Thom)) et à sa fameuse théorie des catastrophes (<https://www.salvador-dali.org/fr/oeuvre/catalogue-raisonne-peinture/1983/>).

Ensuite on fait une petite introduction à la théorie de Morse en expliquant succinctement l'importance de l'étude de la fonction hauteur  $m \in S \mapsto h(m) = z$  définie sur une surface  $S$  pour bien comprendre cette dernière.

Enfin, on introduit la notion de caractéristique d'Euler d'une surface et on explique, en esquissant une démonstration, pourquoi la caractéristique d'Euler de la sphère ou de toute surface qui lui est "difféomorphe" (qui lui "ressemble" différemment) est 2. On calcule la caractéristique d'Euler de quelques surfaces comme un tore, un cylindre, un ruban de Möbius, une bouteille de Klein et de surfaces construites en "collant" des tores.

Voici maintenant quelques pistes pour le prochain contrôle, de deux heures :

**A/** Soit  $\gamma$  l'hypocycloïde définie par

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

où  $x(t) = 3 \cos(t) + \cos(3t)$  et  $y(t) = 3 \sin(t) - \sin(3t)$  si  $t \in \mathbf{R}$ .

On pose  $\Gamma = \gamma(\mathbf{R}) = \{\gamma(t) | t \in \mathbf{R}\}$ .

1/ Montrer que  $\gamma$  est une courbe paramétrée de classe  $C^\infty$ .

2/ Montrer que  $\gamma$  est  $2\pi$  périodique et en déduire que  $\Gamma = \gamma([0, 2\pi[)$ .

3/ Montrer que si  $t \in \mathbf{R}$  alors  $\gamma'(t) = (-6 \cos(t) \sin(2t), 6 \sin(t) \sin(2t))$ .

4/ Calculer, si  $t \in [0, 2\pi]$ , la longueur de la courbe paramétrée  $\gamma$  entre 0 et  $t$ .



5/ Donner  $Z = \{t \in \mathbf{R} \mid \gamma'(t) = 0\}$ .

6/ Montrer que la limite  $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)}$  existe et vaut 0.

7/ Montrer que  $\gamma(]0, \frac{\pi}{2}[)$  est inclus dans le quart de plan  $\{x > 0, y > 0\}$ .

8/ Montrer que  $\gamma(]0, \frac{\pi}{2}[)$  est inclus dans la couronne  $\{2 \leq \|(x, y)\| \leq 4\}$ .

9/ Déterminer l'unique  $t_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  vérifiant  $\langle \gamma(t) \mid \gamma'(t) \rangle = 0$ .

10/ On note  $R_{\frac{\pi}{2}}$  la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  qui fixe l'origine. Donner la matrice de cette rotation et calculer  $R_{\frac{\pi}{2}}(x, y)$  si  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ .

11/ Montrer que si  $t \in \mathbf{R}$  alors  $\gamma(t + \frac{\pi}{2})$  est l'image de  $\gamma(t)$  par  $R_{\frac{\pi}{2}}$  et en déduire que  $\Gamma$  est invariante par la rotation  $R_{\frac{\pi}{2}}$ .

12/ Étudier la parité de  $t \in \mathbf{R} \mapsto x(t)$  et  $t \in \mathbf{R} \mapsto y(t)$  et en déduire que  $\Gamma$  est invariante par la symétrie orthogonale  $S_{Ox}$  par rapport à l'axe  $Ox$ .

13/ Montrer que  $\Gamma$  est invariante par la symétrie orthogonale  $S_{y=x}$  par rapport à la première bissectrice.

14/ Montrer que les ensembles  $\gamma([0, \frac{\pi}{2}[)$ ,  $\gamma([\frac{\pi}{2}, \pi])$ ,  $\gamma([\pi, \frac{3\pi}{2}[)$  et  $\gamma(\frac{3\pi}{2}, 2\pi])$  forment une partition de  $\Gamma$ .

15/ Tracer soigneusement  $\Gamma$ .

**B/** Étude de  $S \subset \mathbf{R}^3$  donnée par  $S = \{x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 + y^2} + z^2 = 4 + \frac{1}{4}\}$ .

On pourra en particulier

- montrer que  $S$  est une surface  $C^\infty$  et compacte (i.e. fermée et bornée) et invariante par rotation autour de l'axe vertical  $Oz$  et par symétrie orthogonale par rapport au plan horizontal  $\{z = 0\}$  ;
- rechercher le lieu des points où  $S$  admet un plan tangent vertical (i.e. qui contient le vecteur  $(0, 0, 1)$ ) et le lieu des points où le plan tangent à  $S$  est dirigé par le plan horizontal ;

- tracer soigneusement cette surface.

**C/** Calculer, à partir de triangulations et en s'appuyant de dessins explicatifs, les caractéristiques d'Euler d'une sphère et d'un tore.

**D/** 1/ Calculer, en revenant à la définition de courbure d'une courbe plane, la courbure d'un cercle de rayon  $R > 0$  en un de ses points.

2/ Soit  $S$  la surface d'équation  $3x^2 + 3y^2 + -2xy - z = 0$ . Calculer ses courbures principales à l'origine.