Université de Rennes 1 — L3 Mathématiques

UFR Mathématiques — Courbes et surfaces paramétrées

2022-2023

Contrôle continu 4 (2 heure)

Exercice A Soit γ l'hypocycloïde définie par

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

où $x(t) = 3\cos(t) + \cos(3t)$ et $y(t) = 3\sin(t) - \sin(3t)$ si $t \in \mathbf{R}$.

On pose $\Gamma = \gamma(\mathbf{R}) = \{\gamma(t) | t \in \mathbf{R}\}$.

1/ Montrer que γ est une courbe paramétrée de classe C^∞.

2/ Montrer que γ est 2π périodique et en déduire que $\Gamma = \gamma([0, 2\pi[)$.

3/ Montrer que si $t \in \mathbf{R}$ alors $\gamma'(t) = (-6\cos(t)\sin(2t), 6\sin(t)\sin(2t))$.

4/ Calculer, si $t \in [0, 2\pi]$, la longueur de la courbe paramétrée γ entre 0 et t.

5/ Donner $Z = \{t \in \mathbf{R} | \gamma'(t) = 0\}$.

6/ Montrer que la limite $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)}$ existe et vaut 0.

7/ Montrer que $\gamma(]0, \frac{\pi}{2}[)$ est inclus dans le quart de plan $\{x > 0, y > 0\}$.

8/ Montrer que $\gamma(]0, \frac{\pi}{2}[)$ est inclus dans la couronne $\{2 \leq ||(x, y)|| \leq 4\}$.

9/ Déterminer l'unique $t_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant $< \gamma(t) | \gamma'(t) >= 0$.

10/ On note $R_{\frac{\pi}{2}}$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui fixe l'origine. Donner la matrice de cette rotation et calculer $R_{\frac{\pi}{2}}(x, y)$ si $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

11/ Montrer que si $t \in \mathbf{R}$ alors $\gamma(t + \frac{\pi}{2})$ est l'image de $\gamma(t)$ par $R_{\frac{\pi}{2}}$ et en déduire que Γ est invariante par la rotation $R_{\frac{\pi}{2}}$.

12/ Étudier la parité de $t \in \mathbf{R} \mapsto x(t)$ et $t \in \mathbf{R} \mapsto y(t)$ et en déduire que Γ est invariante par la symétrie orthogonale S_{Ox} par rapport à l'axe Ox.

13/ Montrer que Γ est invariante par la symétrie orthogonale $S_{y=x}$ par rapport à la première bissectrice.

14/ Montrer que les ensembles $\gamma([0, \frac{\pi}{2}[)$, $\gamma([\frac{\pi}{2}, \pi[)$, $\gamma([\pi, \frac{3\pi}{2}[)$ et $\gamma(\frac{3\pi}{2}, 2\pi[)$ forment une partition de Γ.

15/ Tracer soigneusement Γ.

Exercice B Étude de $S \subset \mathbf{R}^3$ donnée par $S = \{x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2+y^2} + z^2 = 4 + \dfrac{1}{4}\}$.

On pourra en particulier

- montrer que S est une surface C^∞ et compacte (i.e. fermée et bornée) et invariante par rotation autour de l'axe vertical Oz et par symétrie orthogonale par rapport au plan horizontal $\{z = 0\}$;

- rechercher le lieu des points où S admet un plan tangent vertical (i.e. qui contient le vecteur $(0, 0, 1)$) et le lieu des points où le plan tangent à S est dirigé par le plan horizontal ;

- tracer soigneusement cette surface.

Exercice C Calculer, à partir de triangulations et en s'appuyant de dessins explicatifs, les caractéristiques d'Euler d'une sphère et d'un tore.

Exercice D 1/ Calculer, en revenant à la définition de courbure d'une courbe plane, la courbure d'un cercle de rayon $R > 0$ en un de ses points.

2/ Soit S la surface d'équation $3x^2 + 3y^2 - 2xy - z = 0$. Calculer ses courbures principales à l'origine.