Université de Rennes 1 — L3 Mathématiques

UFR Mathématiques — Courbes et surfaces paramétrées

2022-2023

Contrôle continu 3 (1 heure)

Tous les exercices ont le même poids. Traiter au choix trois exercices. Si plus d'exercices sont traités, ne sont retenus dans le calcul de la note que les trois les mieux réussis.

Exercice A Énoncé convaincant de la règle de L'Hôpital avec exemples illustrant l'importance des hypothèses.

Exercice B Énoncé et démonstration du théorème de Rolle.

Exercice C Dans chaque cas montrer que $S \setminus Z$ est une surface C^∞ de $\mathbf{R}^3$ (les réponses seront justifiées et les surfaces seront esquissées) :

a) $S = \{(\cos(s)\cos(t), \sin(s)\cos(t), \sin(t)) | s, t \in \mathbf{R}\}$ et $Z = \emptyset$;

b) $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ et $Z = \emptyset$.

c) $S = \{(t\cos(s), t\sin(s), t) | s, t \in \mathbf{R}\}$ et $Z = \{O\}$;

d) $S = \{y^2 - z^3 = 0\}$ et $Z = \{y = z = 0\} = Ox$;

e) $S = \{(\cos(s), \sin(s)), t) | s, t \in \mathbf{R}\}$ et $Z = \emptyset$;

f) $S = \{x^2 + y^2 z = 0\}$ et $Z = \{x = y = 0\} = Oz$;

Exercice D Soit $C = \{y^2 + z^2 = 1\}$ et $E = \{x^2 + y^2 + 5z^2 = 5\}$. Montrer que C et E sont des surfaces de $\mathbf{R}^3$ et que leur intersection $C \cap E$ est la réunion des deux courbes paramétrées et régulières γ_+ et γ_- données par

$$\gamma_+(t) = (2\cos(t), \cos(t), \sin(t)) \text{ et } \gamma_-(t) = (-2\cos(t), \cos(t), \sin(t)) \text{ si } t \in \mathbf{R}.$$