Université de Rennes 1 | L3 Mathématiques

UFR Mathématiques | Courbes et surfaces paramétrées

2022-2023

Contrôle continu 2 (1 heure)

Tous les exercices ont le même poids. Choisir au choix trois exercices et les traiter. Si plus d'exercices sont traités, ne sont retenus dans le calcul de la note que les trois les mieux réussis.

Exercice A Énoncer et prouver la règle de L'Hôpital dans le cas de deux fonctions f et g qui tendent vers 0 lorsque la variable tend par la droite vers un réel donné.

Exercice B Étudier le folium de Descartes donné par

$$t \in \mathbf{R} \setminus \{-1\} \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} x(t) = & \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = & \dfrac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

On pourra en particulier étudier la régularité de cette courbe paramétrée γ, son comportement asymptotique quand t tend vers $-\infty$, -1 et $+\infty$, et montrer que le tracé Γ est égal à l'ensemble d'équation cartésienne $x^3 + y^3 = 3xy$.

Exercice C On considère la spirale logarithmique donnée par

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} x(t) = & \exp(t)\cos(t) \\ y(t) = & \exp(t)\sin(t). \end{cases}$$

On pose $\Gamma = \gamma(\mathbf{R})$.

1. Donner le vecteur tangent à γ en $t \in \mathbf{R}$ et montrer que γ est régulière.

2. Donner la courbure de γ en $t \in \mathbf{R}$ (il s'agit de la courbure en s tel que $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$ d'une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne $\tilde{\gamma}$ définissant la même courbe

géométrique que γ et liée à γ par un difféomorphisme croisant).

3. Montrer que si $t, s \in \mathbf{R}$ alors l'application linéaire $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto f(x, y) \exp(\lambda)(\cos(\lambda)x - \sin(\lambda)y, \sin(\lambda)x + \cos(\lambda)y)$$

avec $\lambda = s - t$ vérifie $f(\Gamma) = \Gamma$ et $f(\gamma(t)) = \gamma(s)$.

4. Tracer Γ.

Exercice D Montrer que la courbe paramétrée γ définie par

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} x(t) = & t \\ y(t) = & t^2 \\ z(t) = & t^3. \end{cases}$$

est une courbe régulière de classe C^∞ et que $\Gamma = \gamma(\mathbf{R})$ n'est incluse dans aucun plan affine de $\mathbf{R}^3$.

Exercice E Montrer que l'hélice γ définie par

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t) \begin{cases} x(t) = & \cos(\frac{1}{\sqrt{2}}t) \\ y(t) = & \sin(\frac{1}{\sqrt{2}}t) \\ z(t) = & \frac{1}{\sqrt{2}}t. \end{cases}$$

est une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne, régulière, de classe C^∞ et dont la courbure et la torsion en $t = 0$ valent $\frac{1}{2}$.