Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2022-2023

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 1 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Résumé des séances

L'enseignement de CMP3 repose sur un document pdf appelé cmp3-2022-2023.pdf et accessible à partir de la page https://perso.univ-rennes1.fr/jean-marie.lion/cmp3 qui permet d'accéder à une liste d'exercices, aux règles d'évaluation.

04/01. La séance est consacrée à une introduction aux nombres complexes. Elle débute par une présentation succincte des différents ensembles de nombres, les entiers naturels, les entiers relatifs, les décimaux, les rationnels et les réels. On présente des propriétés caractéristiques de ces ensembles. On donne deux exemples de nombres réels qui ne sont pas rationnels. On fait un raisonnement par l'absurde et un raisonnement par récurrence. On introduit rapidement les notions de groupe commutatif, d'anneau commutatif et de corps commutatif après avoir évoqué les propriétés de commutativité, d'associativité, de distributivité, d'existence de neutre et d'inverses. La notion de fonction polynomiale réelle est présentée et le degré d'une telle fonction est expliqué. Le corps commutatif $(\mathbf{C},+,\times)$ est défini et il est expliqué pourquoi $\mathbf{R}$ peut être "considéré" comme inclus dans $\mathbf{C}$. On introduit le complexe $i=(0,1$ et on montre que i est solution de l'équation $x^2+1=0$ qui n'a pas de solution dans $\mathbf{R}$.

11/01. En début de séance on établit l'existence de l'opposé d'un nombre complexe et de l'inverse pour la multiplication d'un nombre complexe non nul. On s'assure aussi que $(0,0)$ et $(1,0)$ sont bien les neutres pour respectivement l'addition et la multiplication.

On introduit ensuite les notions de partie réelle et partie imaginaire d'un nombre complexe puis on définit la conjugaison et on démontre que c'est une involution.

La dernière partie de la séance est consacrée à l'étude du module d'un nombre complexe. On étudie son comportement multiplicatif puis on établit l'inégalité triangulaire (sans prouver le cas d'égalité mais en l'énonçant). On fait intervenir le discriminant d'un polynôme réel du second degré.

18/01. On revient sur le fait que le polynôme du second degré considéré le 11/01 ne peut avoir deux racines. On traite aussi le cas de l'égalité $|z+z'|=|z|+|z'|$.

On utilise les égalités $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$ et $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times z'$ qu'on établit.

À titre d'exercice on établit l'égalité $\overline{z^{-1}}=(\bar{z})^{-1}$ si z est un complexe non nul. Deux méthodes sont exposées.

La notion d'argument d'un nombre complexe non nul est donnée et il est indiqué que si $z\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$ alors il possède un unique argument appartenant à l'intervalle $[0,2\pi[$ et si on note θ_z cet argument alors l'ensemble des arguments de z est l'ensemble

$$\{\theta_z + 2k\pi | k \in \mathbf{Z}\}.$$

Le point de vue géométrique des nombres complexes est alors exposé en identifiant $\mathbf{C}$ à un plan euclidien $\mathbf{R}^2$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{y})$ de façon à ce que $z = x + iy$ soit identifié au point M de coordonnées (x, y). Par ce procédé, 1 est identifié au point de coordonnées $(1, 0)$ et i, l'un des deux nombres complexes dont le carré vaut 1 est identifié au point de coordonnées $(0, 1)$.

La séance se termine par l'introduction de l'exponentielle complexe, la preuve de l'égalité

$$\exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z')$$

qui est la propriété de morphisme de l'exponentielle et l'étude de l'image par l'exponentielle de l'ensemble $\lambda + i\mathbf{R}$ lorsque $\lambda \in \mathbf{R}$. On utilise sans les expliquer les égalités

$$\cos(\theta + \theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta'),$$
$$\sin(\theta + \theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta').$$

25/01. On poursuit l'étude de l'image par l'exponentielle complexe de certaines droites du plan complexes, plus exactement des droites $\mathbf{R} + \lambda i$ et $\mu + i\mathbf{R}$.

La seconde partie de la séance est consacrée à la résolution des équations du second degré à coefficients complexes, donc du type $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue z et avec $a \neq 0$. On explique la méthode de réduction qui permet de trouver les solutions à partir des coefficients a, b, c et des racines carrées du discriminant $b^2 - 4ac$ de l'équation. C'est l'occasion d'établir les identités remarquables $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ et $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ si $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$. On explique aussi comment calculer algébriquement les deux racines carrées d'un nombre complexe non nul en démontrant que $A + iB$ vérifie $(A + iB)^2 = \alpha + i\beta$ si et seulement si (A, B) vérifie

$$\begin{cases} A^2 - B^2 & = & \alpha \\ 2AB & = & \beta \\ A^2 + B^2 & = & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}$$

On termine en illustrant la méthode avec le calcul des deux racines de $5 + 7i$.

08/02. Il s'agit d'une séance double. Elle est divisée en trois parties

Dans la première partie on étudie les racines n^e d'un nombre complexe non (0 étant sa seule racine n^e) lorsque $n \in \mathbf{N}^*$. On débute par un théorème qui établit la liste des racines n^e de l'unité puis on généralise au cas d'un complexe non nul quelconque.

Dans la deuxième partie on fait une introduction rapide à l'analyse des fonctions d'une variable réelle. On donne des définitions des principaux concepts de limite, continuité, nombre dérivée. On énonce les propriétés les plus classiques comme les propriétés algébriques des limites, de la continuité, de la dérivation ainsi que le théorème des valeurs intermédiaire ou le fait que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Certaines propriétés sont établies (continuité de l'inverse, de la composée, continuité et dérivabilité de certaine fonctions. L'exponentielle est introduite comme l'unique fonction dérivable vérifiant
1/ $\exp'(x) = \exp(x)$ si $x \in \mathbf{R}$,
2 $\exp(x + y) \exp(x) \exp(y)$ si $x, y \in^{\mathbf{R}}$,
3/ $\exp(0) = \exp'(0) = 1$.
On explique pourquoi la condition 2/ et le second point de la condition 3/ peuvent se déduite de la condition 1/ et de $\exp(0) = 1$.

La troisième partie est consacrée à une présentation du prochain contrôle. Il est dit que ce dernier est composé de deux exercices :
1/ il est indiqué que dans le premier il s'agit de calculer $z \cdot \bar{z}$ quand z est un complexe, de montrer que le carré du module de z est non nul si $z \neq 0$ et de vérifier la formule qui donne l'inverse d'un tel nombre complexe ;
2/ il est indiqué que dans le deuxième exercice qui comporte sept questions on doit montrer successivement
a/ $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ et $\exp(x) \neq 0$,
b/ $\exp(x) = (\exp(\frac{x}{2}))^2$ et $\exp(x) > 0$,
c/ exp strictement croissante et $\exp(x) > 1$ si $x > 1$ (indice : on dérive),
d/ $\exp(x) - x$ croissante sur $\mathbf{R}^+$ et $\exp(x) - x > 0$ sur $\mathbf{R}^+$ (indice : on dérive et on utilise $\exp(0) = 1$),
e/ $\exp(nx) > x^n$ si $x > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$ (indice : faire une récurrence en utilisant le résultat précédent pour l'initialisation et en le combinant avec l'égalité $\exp((n+1)x) = \exp(nx) \cdot \exp(x)$ pour l'hérédité),
f/ $n^n \exp(y) > y^n$ si $y > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$ (indice : poser $y = nx$),
g/ $\frac{\exp(y)}{y^m} > A$ si $A > 0$, $m \in \mathbf{N}$ et $y > A \cdot (m+1)^{m+1}$.

15/02. On présente la propriété de la borne supérieure que vérifie $\mathbf{R}$ mais pas $\mathbf{Q}$.

Après avoir donné la définition d'une suite convergente vers une limite $l \in \mathbf{R}$ on démontre cette propriété de la borne supérieure implique qu'une suite qui est croissante et majorée est convergente vers un $l \in \mathbf{R}$.

On introduit ensuite la notion de suite-extraire (ou de sous-suite) et on donne des exemples construits à partir de la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

On démontre pour finir le théorème de Bolzano-Weierstrass qui dit que de toute suite numérique à valeurs dans un segment on peut extraire une suite convergente. La preuve est réalisée à l'aide d'une dichotomie.

L'après-midi a lieu le premier contrôle continu de CMP3.

01/03. On prouve le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que l'image d'un segment par une fonction numérique de la variable réelle continue est un segment.

On donne deux exercices d'application.

On énonce le théorème de Rolle et des accroissements finis.

08/03. On prouve le théorème de Rolle puis celui des accroissements finis.

On donne deux exercices d'application. Le premier consiste à montrer qu'on peut contrôler la variation d'une fonction sur un segment par un contrôle de sa dérivée et de la longueur de l'intervalle de contrôle. Dans le second on montre une relation entre le nombre de zéros d'une fonction f (les x tels que $f(x) = 0$) et le nombre de zéros de sa dérivée.

On termine la séance en montrant qu'une fonction continue et dérivable sur un intervalle ouvert est strictement croissante si sa dérivée est strictement positive.

15/03. Après avoir établit un résultat qui relie stricte monotonie, continuité et bijectivité on définit ce qu'est une fonction de classe C^k où k est un entier naturel et ce qu'est une fonction C^∞. On donne des exemples classiques.

Ensuite on introduit la notion de primitive, on énonce le théorème de Newton relatif à l'existence de primitives pour les fonctions continues sur un intervalle. On donne une liste de quelques exemples qui inclut la primitive de la fonction tangente.

La dernière partie de la séance est une introduction à la notion d'intégrale et à sa relation avec celle de primitive. On définit ce qu'est une fonction en escaliers et son intégrale. On donne un exemple construit à partir d'une fonction affine et on on montre le lien à la limite entre intégrale d'une fonction en escalier qui "approxime" la fonction affine et l'aire d'un trapèze qui est associé à cette dernière.

22/03. On revient sur la définition de la valeur absolue et sur le fait qu'elle n'est pas dérivable. On confirme l'observation suivante qui avait fait l'objet d'une question à la fin de la dernière séance :
- la valeur absolue est une sorte de recollement de deux fonctions et ceci explique (empiriquement) qu'elle ne soit pas dérivable en 0 ;
- plus généralement une fonction obtenue de cette façon a peu de chances d'être continue et encore moins d'être dérivable partout.
Il est néanmoins indiqué que la valeur absolue peut être définie avec la formule $|x| = \sqrt{x^2}$. On s'intéresse à l'extension de la racine carrée aux nombres complexes en posant $\sqrt{z} = \sqrt{r}\exp(i\frac{\theta}{2})$ si $z = r\exp(i\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ et on observe le comportement (au moins graphiquement) de la composée $\sqrt{\exp(i\theta)}$ lorsque $\theta \in [0, 2\pi[$ et θ tend vers 2π.

Les calculs inachevés lors de la dernière séance (fin de la dernière page des notes du 15/03) sont repris en début de séance et complétés dans les notes d'aujourd'hui en ligne (pages 2 et 3). On s'intéresse à l'aire comprise entre la courbe $y = x^d$, l'axe Ox et les droites $x = 0$ et $x = b$. Ensuite on donne une définition de l'intégrale à partir des sommes de Riemann. On indique le lien avec le calcul de primitives.

On établit la formule d'intégration par parties et on l'applique au calcul de $\displaystyle\int_a^b x\exp(x)dx$.

29/03. On donne plusieurs exemples de calculs qui font appel à l'intégration par parties : $\displaystyle\int_0^x \cos(t)\exp(t)dt$, $\in_0^x t^n \exp(t)dt$ avec $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_1^x \ln(t)dt$.

On explique comment cacluer une intégrale par changement de variable et on donne l'exemple du calcul de $\displaystyle\int_\alpha^\beta \cos(x^3)x^2dx$.

On énonce les propriétés de linéarité et de Chasles de l'intégrale.

On démontre les principales propriétés du logarithme népérien considéré comme primitive qui s'annule en 1 de la fonction qui à $x > 0$ associe $\frac{1}{x}$. C'est l'occasion de considérer l'exponentiel comme réciproque du logarithme et définir x^λ si $x > 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ comme $x^\lambda = \exp(\lambda \ln(x))$.

La séance s'achève par une introduction succincte aux fonctions numériques de deux ou trois variables et des applications d'un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$.

On explique rapidement comment il est possible dans certains cas de dériver des fonctions numériques de deux ou trois variables par rapport à chacune des variables et on introduit la notation f'_x, f'_y, f'_z pour les dérivées obtenues (dites dérivés partielles). On explique qu'on peut itérer ce processus de dérivation. la propriété de symétrie de Schwarz c'est à dire l'égalité $f''_{xy} = f''_{yx}$ est énoncée après avoir été constatée sur un exemple et on donne une condition nécessaire portant sur les dérivées partielles aux points où une fonction numérique de plusieurs variables possède un maximum ou un extremum. Deux exemples sont traités.

05/04. Au cours de cette ultime séance on traite des exercices susceptibles de tomber au prochain contrôle :

- on montre que la fonction définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$ ne possède pas d'extremum bien que ses dérivées partielles f'_x et f'_y s'annulent simultanément en $(0,0)$;

- on montre que les dérivées partielles f'_x et f'_y de la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2x + y + 1$ s'annulent simultanément en un point où f présente un minimum ;

- on énonce le théorème de Rolle ;

- on calcule $f(x) = \int_0^x t\cos(t)dt$ si $x \in \mathbf{R}$;

- on montre par récurrence sur n que si $x \in \mathbf{R}$ alors $(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}$;

- on montre que si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \leq \frac{1}{1-x} \leq \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{1}{2^n};$$

- on montre que si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ alors $\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x)$;

- on montre que les fonctions dérivables f et g définies par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}x^k \text{ et } g(x) = f(x) + \frac{1}{2^n}x$$

vérifient

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \text{ et } g'(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{1}{2^n};$$

- on montre que si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}x^k \leq -\ln(1-x) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}x^k + \frac{1}{2^n}x;$$

- on conclut en montrant $\frac{5}{8} \leq \ln(2) \leq \frac{7}{8}$.