Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2022-2023

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Exercices

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Version provisoire du 8 mars 2023

Cette liste d'exercices est directement inspirée de celles des modules "A01" et "AN1" rédigées entre 2006 et 2008 par les équipes pédagogiques de l'UFR Mathématiques. Seulement une petite partie de cette liste sera traitée durant le semestre.

Première partie
Les nombres complexes

Exercice 1 Donner une forme trigonométrique, puis une forme exponentielle de

$(a)\quad z = 1 - i\sqrt{3}$	$(b)\quad z = -\sqrt{3} + i$	$(c)\quad z = -4 + 4i$
$(d)\quad z = -2$	$(e)\quad z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$(f)\quad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
$(g)\quad z = 5i$	$(h)\quad z = \frac{2}{1-i}$	

Exercice 2 En utilisant le fait qu'un argument d'un quotient est une différence d'arguments, puis qu'un argument d'un produit est une somme d'arguments, donner un argument du nombre

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{-1 + i}\right)^{12}$$

Exercice 3 Dans le plan complexe, on note A et B les points d'affixes respectives 1 et $3 + 2i$. Représenter l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 1| = |z - (3 + 2i)|$.

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

$(a)\quad 2iz + 5 = 3 + 2i$	$(b)\quad 1 - 2iz + 4z = 3i(1 + 5i)$
$(c)\quad (z + i)(z - 5) = z^2 - i$	$(d)\quad (z - 3i)(2z - 1) = 1 - 4z^2$
$(e)\quad z^2 = -1$	$(f)\quad z^2 + 9 = 0$
$(g)\quad z^4 + 2z^2 = 0$	

Exercice 5 Donner la forme algébrique des complexes suivants

$$(a) \quad z_1 = (2+i)^4 \qquad (b) \quad z_2 = (1+i)^5 \qquad (c) \quad z_3 = \frac{4-3i}{2-i} - \frac{1-i}{-2-i}$$

Exercice 6 Pour tout complexe z, on pose

$$P(z) = z^3 + (-4+i)z^2 + (13-4i)z + 13i.$$

Écrire la forme algébrique de $P(i)$, de $P(-i)$, de $P(2-3i)$.

Exercice 7 Simplifier l'écriture du complexe

$$\frac{1-\cos(x) - i\sin(x)}{1+\cos(x) + i\sin(x)}$$

après avoir précisé pour quelles valeurs de x ce nombre existe.

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$(a) \quad 2z^2 - 6z + 5 = 0 \qquad (b) \quad z^2 - 5z + 9 = 0 \qquad (c) \quad z^4 + z^2 - 20 = 0$$

Exercice 9 (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 1 = 0$.
(b) Développer le produit $(z-1)(z^3 + z^2 + z + 1)$.
(c) Quelles sont les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$?

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$(a) \quad z = 2\overline{z} - 2 + 6i \qquad (b) \quad 2z + i\overline{z} = 5 - 4i$$

Exercice 11 On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.

(a) Montrer que si le complexe α est solution de l'équation $P(z) = 0$, il en est de même de $\overline{\alpha}$ et $\frac{1}{\alpha}$.

(b) Calculer $P(1+i)$. Déduire alors la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

(c) Écrire $P(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels.

Exercice 12 Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points M, d'affixe z tels que :

$$(a)\ |z| = 2 \qquad (b)\ \mathrm{Re}(z) = -1 \qquad (c)\ |z| = 2 \text{ et } \arg(z) = \frac{\pi}{4} \qquad (d)\ |z| = 2 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 1$$

Exercice 13 Donner une forme trigonométrique de chaque complexe proposé.

$$(a) \quad z_1 = \sqrt{3} + 3i \qquad (b) \quad z_2 = (\sqrt{3} - 2)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Exercice 14 Calculer les deux complexes :

$$(a) \quad z_1 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 \qquad (b) \quad z_2 = (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$$

Indication : une bonne remarque avant de commencer le calcul permettra de le simplifier.

Exercice 15 Soit $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1-i$.
(a) Écrire sous forme trigonométrique z_1, z_2 et $z = \frac{z_1}{z_2}$.
(b) En déduire : $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
(c) Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'équation

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos(x) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(x) = 2$$

Exercice 16 (a) Linéariser $\cos^3(x)$ et $\sin^3(x)$.
(b) Déduire la linéarisation de $\cos^3(2x)$ et de $\sin^3(\frac{x}{3})$.

Exercice 17 Linéariser

(a) $A(x) = \sin^5(x)$ (b) $B(x) = \sin^2(x)\cos^3(x)$ (c) $C(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

Exercice 18 Quel est l'ensemble des complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ ont le même module ?

Exercice 19 Quel est l'ensemble des complexes z tels que le complexe $Z = 2z^2 - 3z + 1$ soit réel ?

Exercice 20 Construire dans le plan complexe
(a) l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Im}(z^2) = 1$.
(b) l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Re}(z^2) = 0$.
(c) l'ensemble E_3 des points M d'affixe z tels que $3 \cdot \mathrm{Re}(z^2) = 4 \cdot \mathrm{Im}(z^2) = 1$. On utilisera l'identité $(a-3b)(b+3a) = 3a^2 - 8ab - 3b^2$.
(d) Déterminer les points communs à E_1 et E_2, puis à E_1 et E_3.

Exercice 21 À tout complexe z distinct de i, on associe le complexe $Z = \frac{z+i}{z-i}$.
(a) Montrer que Z est toujours distinct de 1.
(b) Si $z = x+iy$, (x et y réels) et $Z = X+iY$ (X et Y réels), exprimer X et Y en fonction de x et y.
(c) Déduire l'ensemble des points m d'affixe z tels que

(i) Z soit réel (ii) Z soit imaginaire pure (iii) $\mathrm{Re}(z) = 1$.

Exercice 22 Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition donnée.

$$\begin{array}{llll} (a) & |z-3| = |z-(1+i)| & (b) & |z+1+i| = |z-2+3i| \\ (c) & |z-2+i| = \sqrt{5} & (d) & |z+3-i| \leqslant 2 \\ (e) & |z+3-i| > |z| & (f) & |z| < |z+3-i| < 2 \end{array}$$

Exercice 23 Pour z un complexe non nul on pose $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

(a) Quel est l'ensemble des complexes z tels que $f(z) = z$?

(b) Soit $z_0 = 1 + i$. Calculer $\frac{1}{z_0}$ et placer les points d'affixe z_0 et $\frac{1}{z_0}$ dans le plan complexe. Construire géométriquement le point d'affixe $f(z_0)$.

(c) Montrer que si z est un complexe de module 1, alors $f(z)$ est réel et contenu dans l'intervalle $[-1, 1]$. Cette démonstration peut être faite soit par un calcul, soit géométriquement, en s'inspirant de (b).

Exercice 24 Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(0; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4cm). On désigne par A le point d'affixe 1 et par $\mathcal{P}^*$ le plan $\mathcal{P}$ privé de 1. Soit f l'application de $\mathcal{P}^*$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe Z telle que $Z = \frac{z-2}{z-1}$.

(a) Soit B le point d'affixe $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer $B' = f(B)$.

(b) Déterminer les points I et J invariants par f. (On notera I celui d'ordonnée positive.)

(c) (i) Exprimer en fonction de z les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$.

(ii) Déduire de (i) une relation entre AM' et AM et prouver que l'image par f du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 1 est le cercle $\mathcal{C}$. Vérifier que B appartient à $\mathcal{C}$.

(iii) Tracer $\mathcal{C}$ et placer les points B, B', I et J sur la figure.

Exercice 25 On note A et B les points d'affixes respectives 1 et $-2i$.

(a) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M d'affixe z tels que $(2+i)z + (2-i)\overline{z} = 4$. Ensuite, déterminer et construire l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que $(z+2i)(\overline{z}-2i) = 4$.

(b) Soit f la transformation qui au point M d'affixe z avec $z \neq -2i$ associe le point M' d'affixe z' :

$$z' = \frac{\overline{z} + 4i}{\overline{z} - 2i}$$

(i) Vérifier que $z' - 1 = \frac{6i}{\overline{z}-2i}$

(ii) En déduire que $BM \times AM' = 6$ et trouver une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'})$.

(iii) Soient M_1 et M_2 les points communs à Δ et Γ. Déterminer et construire les points $f(M_1)$ et $f(M_2)$.

Exercice 26 Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(0; \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe 2. Soit ϕ l'application de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe Z associe le point $M' = \phi(M)$ d'affixe Z' définie par :

$$Z' = \frac{3+\sqrt{3}i}{4}Z + \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

(a) Déterminer :

(i) l'affixe de l'image $\phi(A)$ du point A ;

(ii) l'affixe du point P tel que $\phi(P) = 0$.

(b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de ϕ.

(c) Lorsque le point M est distinct du point A :

(i) Démontrer que le triangle AMM', avec $M' = \phi(M)$, est rectangle en M'. Préciser les angles du triangle AMM'.

(ii) Le point M étant donné, en déduire une construction au compas du point M'.

Exercice 27 Supposons que $ABCD$ est un quadrilatère et que α est un complexe de module r et d'argument θ. Soient a, b, c, d les affixes de A, B, C, D dans un plan muni d'un repère orthonormal direct.

Supposons :
— la similitude directe de centre A, de rapport r et d'angle θ transforme B en Q,
— la similitude directe de centre B, de rapport r et d'angle θ transforme C en M,
— la similitude directe de centre C, de rapport r et d'angle θ transforme D en N,
— la similitude directe de centre D, de rapport r et d'angle θ transforme A en P.

On appellera q, m, n, et p les affixes de Q, M, N, et P.
(a) Déterminer q en fonction de α, a, et b.
(b)(i) Montrer l'équivalence

$$MNPQ \text{ est un parallélogramme si et seulement si } n + q = m + p.$$

(ii) En déduire l'équivalence

$$(MNPQ \text{ est un parallélogramme}) \iff (\alpha = \frac{1}{2} \text{ ou } ABCD \text{ est un parallélogramme}).$$

(c) On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme et que $\alpha = \frac{1+i}{2}$. En déduire que $MNPQ$ est un carré.

Exercice 28 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(A; \vec{u}, \vec{v})$, on considère un parallélogramme tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{u}$. On note E le point d'affixe $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i$ et F l'image de C par la similitude directe f de centre B, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

(a) Vérifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{6}$ et montrer que le triangle BCF est rectangle en F. Faites une figure soignée.

(b) On note t la translation de vecteur $\vec{u}$, et g la similitude directe de centre E qui transforme A en B. Donner les éléments caractéristiques de g.

(c) Montrer que $g = f \circ t$. Indication : utiliser des écritures complexes de t, f, g.

(d) Montrer que g transforme D en F. En déduire la nature et les angles du triangle DEF.

Deuxième partie

Fonctions et graphes

Exercice 29 Dans chacun des cas suivants indiquer dans le tableau si on a défini
- une application de A dans B,
- une injection de A dans B,
- une surjection de A dans B.

$A = \{1,2,3\},\ B = \{1,2,3,4\}$

x	1	2	3
y	4	2	1

	oui	non
application		
injection		
surjection		

$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{1,2,3,4\}$

x	1	2	3	4
y	3	4	1	2

	oui	non
application		
injection		
surjection		

$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{1,2,3,4\}$

x	1	2	3	4
y	1	3	2	4

	oui	non
application		
injection		
surjection		

$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{1,2,3\}$

x	1	2	3	4
y	3	2	1	1

	oui	non
application		
injection		
surjection		

$A = \{1,2,3\},\ B = \{1,2,3,4\}$

x	1	1	2	3
y	2	4	1	3

	oui	non
application		
injection		
surjection		

$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{1,2,3,4\}$

x	1	2	3	4
y		3	2	1

	oui	non
application		
injection		
surjection		

$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{1,3,4\}$

x	1	2	3	4
y	3	3	3	3

	oui	non
application		
injection		
surjection		

$A = \{1,2,4\},\ B = \{1,2,3,4\}$

x	1	2	4
y	1	2	4

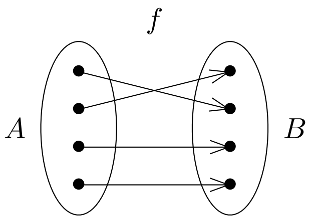
	oui	non
application		
injection		
surjection		

$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{1,2,3,4\}$

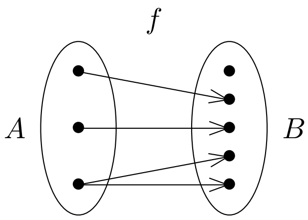
x	1	2	3	4
y	4	4	1	2

	oui	non
application		
injection		
surjection		

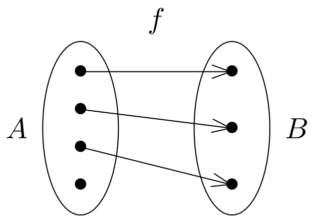
Exercice 30 Dans chacun des cas suivants indiquer dans le tableau si on a défini
- une application de A dans B,
- une injection de A dans B,
- une surjection de A dans B.



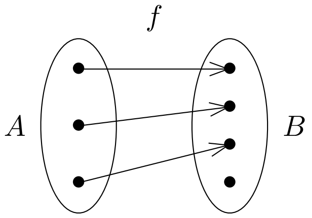
	oui	non
application		
injection		
surjection		



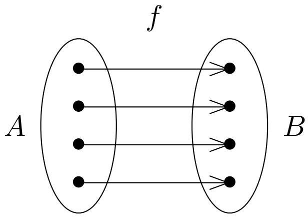
	oui	non
application		
injection		
surjection		



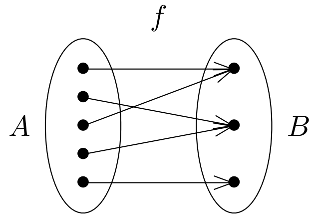
	oui	non
application		
injection		
surjection		



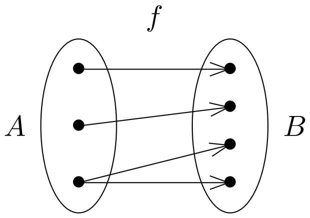
	oui	non
application		
injection		
surjection		



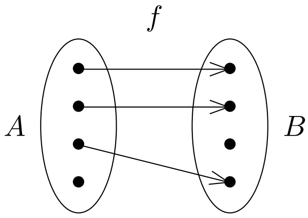
	oui	non
application		
injection		
surjection		



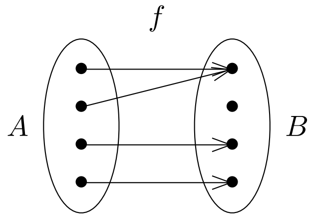
	oui	non
application		
injection		
surjection		



	oui	non
application		
injection		
surjection		



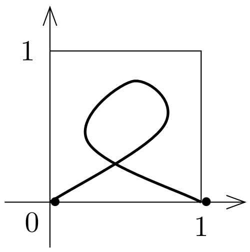
	oui	non
application		
injection		
surjection		



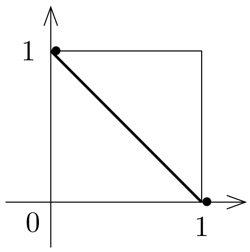
	oui	non
application		
injection		
surjection		

Exercice 31 Dans chacun des cas suivants indiquer dans le tableau si on a repésenté le graphe

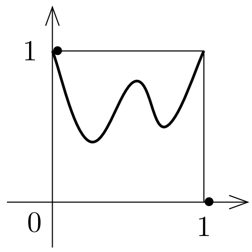
- d'une application de A dans B,
- d'une injection de $[0,1]$ dans $[0,1]$,
- d'une surjection de $[0,1]$ dans $[0,1]$.



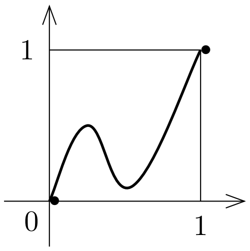
	oui	non
application		
injection		
surjection		



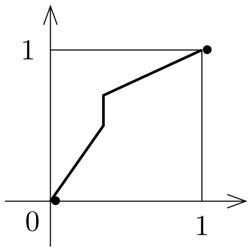
	oui	non
application		
injection		
surjection		



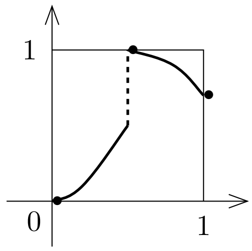
	oui	non
application		
injection		
surjection		



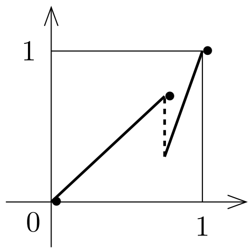
	oui	non
application		
injection		
surjection		



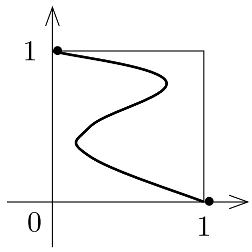
	oui	non
application		
injection		
surjection		



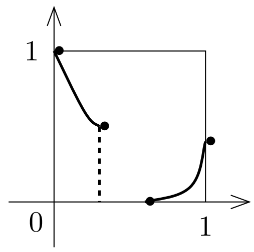
	oui	non
application		
injection		
surjection		



	oui	non
application		
injection		
surjection		



	oui	non
application		
injection		
surjection		



	oui	non
application		
injection		
surjection		

Exercice 32 Trouver le domaine de définition des fonctions réelles données par les formules suivantes :

$$\begin{array}{llllllll}
(a) & \tan(2x), & (b) & x^5-3x^2+2x-7, & (c) & \ln(1-x), & (d) & \ln(1-x^2), \\
(e) & \dfrac{1}{x^2-5x+6}, & (f) & |\ln(x)|, & (g) & \sqrt{x^2-3x-4}, & (h) & \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}, \\
(i) & \dfrac{1}{\ln(x^2-4)}, & (j) & \dfrac{1}{\sin(2x)}, & (k) & \dfrac{1}{x\,\cos(x)}, & (l) & \dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}.
\end{array}$$

Exercice 33 Trouver le domaine définition des fonctions réelles données par les formules suivantes :

$$(a)\quad y=\sqrt{x},\qquad (b)\quad y=\sqrt{-x},\qquad (c)\quad y=-\sqrt{x},\qquad (d)\quad y=-\sqrt{-x},$$

Tracer les fonctions.

Exercice 34 Déterminer le domaine de définition et l'image, puis tracer la fonction

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathrm{Dom}(f)\subseteq\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+3}{x-5} \end{array}$$

Exercice 35 Lesquelles des fonctions à variables réelles suivantes sont paires ou impaires ?

$$\begin{array}{llllll}
(a) & 5x^4-3x^2, & (b) & 2x^4-x^3+1, & (c) & \sin(x^3), \\
(d) & \sin^2(x^3), & (e) & \mathrm{e}^{|x|}, & (f) & \ln(|x|), \\
(g) & \tan(\sin(x)), & (h) & \mathrm{e}^{\sin(x)}, & (i) & \sin(\ln(x)).
\end{array}$$

Exercice 36 Démontrer que

1. la composition $f\circ g$ de deux fonctions impaires est paire,
2. la composition $f\circ g$ de deux fonctions paires est paire,
3. la composition $f\circ g$ d'une fonction paire et d'une fonction impaire est impaire.

Exercice 37 Soit $f(x)=\frac{3}{x}$ et $g(x)=\frac{2-x}{2+x}$. Donner une expression simplifiée des fonctions $f\circ f, f\circ g, g\circ f$ et $g\circ g$. Pour chaque fonction on indiquera le domaine de définition.

Exercice 38 Afin de trouver le graphe de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$ on pourra décomposer cette fonction en la composition de deux fonctions connues. Justifier votre résultat.

Exercice 39 On donne $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $(f \circ g)(x) = 3x - 4$. Déterminer $g(x)$.

Exercice 40 Déterminer $f(x)$ tel que $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = 2x + 1$.

Exercice 41 Déterminer le quotient et le reste des divisions polynomiales suivantes

$$(a)\ \frac{x^4+2x^2+1}{x^4-2x^2-1}, \qquad (b)\ \frac{x^3+1}{x+2}, \qquad (c)\ \frac{x^4-x^3+2x^2-7}{2x+5},$$
$$(d)\ \frac{x^5-x^3+x-1}{x^2+x-3}, \qquad (e)\ \frac{x^6-1}{x^2-x-2}, \qquad (f)\ \frac{x^5-x^4+2x^3+x}{x^3+2x^2-3}.$$

Exercice 42 Factoriser les polynômes suivants (en produit de polynômes irréductibles)

(a) $x^3 + x^2 - 4x - 4$, (b) $y^3 + y^2 - y - 1$,
(c) $z^3 + 2z^2 - 23z - 60$, (d) $c^5 + c^4 - 2c^3 - 2c^2 + c + 1$,
(e) $t^6 - 1$, (f) $u^4 + u^3 - 25u^2 - 37u + 60$.

.

Exercice 43 Démontrer que $x = -2$ est une racine de $g(x) = x^5 + 9x^4 + 32x^3 + 56x^2 + 48x + 16$. Déterminer la multiplicité de cette racine sans factoriser le polynôme g.

Exercice 44 Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $|2x - 5| = 4$, (b) $|x^2 - 2x - 5| = 1$,
(c) $|x^3 - 1| = 7$, (d) $|2x + 4| < 3$,
(e) $|2x^2 - 5x - 4| \leq 3$, (f) $|x^2 + 5x| \geq 2$.

Exercice 45 Donner le graphe des fonctions données par les formules suivantes :

$$(a)\ \ |x^2 - 5x + 6|, \qquad (b)\ \ |\sin(2x)|, \qquad (c)\ \ \left|\frac{x-2}{x+1}\right|$$

Indication : dans un premier temps, considérer les expressions sans valeurs absolues.

Exercice 46 Exprimer $\cos(5x)$ à l'aide de $\cos(x)$.

Exercice 47 Trouver une formule d'addition pour exprimer $\operatorname{cosec}(x + y)$ à l'aide de sec et de cosec.

Exercice 48 Utiliser les propriétés de la fonction exp pour montrer que

$$\ln\left(\frac{p}{q}\right) = \ln(p) - \ln(q).$$

Exercice 49 Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

$$(a)\quad \left(\tfrac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}, \qquad (b)\quad \log_9\left(\tfrac{1}{27}\right),$$
$$(c)\quad \ln(1+\cos(x)) + \ln(1-\cos(x)) - 2\ln(\sin(x)).$$

Exercice 50 Exprimer $\mathrm{sh}(3x)$ à l'aide de $\mathrm{sh}(x)$.

Exercice 51 En partant du graphe de sh, ch et th, trouver le graphe de leurs fonctions inverses.

Exercice 52 Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

$$(a)\quad \mathrm{ch}(\ln(x)), \qquad (b)\quad \coth(\ln(x)),$$
$$(c)\quad \frac{\mathrm{ch}(\ln(x) - \mathrm{sh}(\ln(x))}{\mathrm{ch}(\ln(x) + \mathrm{sh}(\ln(x))}.$$

Exercice 53 Pour les fonctions suivantes déterminer le domaine de définition et l'image, trouver l'éventuelle expression de la fonction inverse et déterminer le domaine de définition et l'image de cette dernière, puis tracer la fonction et son inverse dans un même repère :

$$(a)\quad x \mapsto \frac{2x}{3x-1}, \qquad (b)\quad x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$$

Exercice 54 Pour chacune des fonctions données par les formules suivantes, dont le domaine est indiqué, conjecturer si elle est ou non bijective, en considérant la formule. Tracer le graphe de chaque fonction pour confirmer la conjecture (ou autrement).

$$(a)\quad \tan(x), \quad 0 < x < 1; \qquad (b)\quad \exp(|x|), \quad -1 < x < 1;$$
$$(c)\quad \mathrm{ch}(2x), x > 1; \qquad (d)\quad x^2 + 6x + 9, x > 0;$$
$$(e)\quad x^2 - 6x + 9, x > 0; \qquad (f)\quad \frac{1}{x-1}, x \neq 1;$$
$$(g)\quad \frac{1}{(x-1)^2}, x > 1; \qquad (h)\quad \exp(x)\ln(x), x > 0.$$

Exercice 55 Montrer que si le f et le g sont des fonctions croissantes sur le domaine D, alors $f+g$ est une fonction croissante. Donner des exemples pour prouver que $f-g$, fg et f/g ne sont pas nécessairement des fonctions croissantes.

Exercice 56 Trouver une formule pour l'inverse de la fonction f donnée par la formule suivante.

$$5 - 12x - 2x^2, \quad x > -3.$$

Esquisser le graphe de $f(x)$ et le graphe de son inverse sur un même graphique.

Exercice 57 Simplifier les expressions suivantes autant que possible.

$$(a)\quad \cos(\sin^{-1}(x)); \quad (b)\quad \sin(\tan^{-1}(x)); \quad (c)\quad \tan(\sec^{-1}(x)).$$

Exercice 58 Trouver des exemples numériques pour montrer qu'en général

$$\tan^{-1}(x) \neq \frac{\sin^{-1}(x)}{\cos^{-1}(x)}.$$

Exercice 59 En partant des graphes de sh, ch et th, esquisser les graphes de leurs inverses par réflexion à la droite $y = x$.

Exercice 60 Prouver les formules

$$(a) \quad \mathrm{sh}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}); \quad (b) \quad \mathrm{th}^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right).$$

Troisième partie

Limites de fonctions, fonctions continues

Exercice 61 Tracer le graphique de la fonction donnée par la formule suivante :

$$\frac{2x^2 - 5x + 7}{x^2 - 5x + 6}$$

Décrire les comportements limites observées près des asymptotes verticales, et pour $x \to \pm\infty$.

Exercice 62 Tracer les graphiques des fonctions données par les formules suivantes. Décrire les comportements limites observées près des asymptotes verticales, et pour $x \to \pm\infty$.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & x^4 + 2x^2 - 3x + 1, & (b) & 3 + 2x^2 - x^5, \\
(c) & \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}, & (d) & \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}}, \\
(e) & \sqrt{x^2+4}, & (f) & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}, \\
(g) & \dfrac{x^2 - x - 2}{3x^2 + 4x + 5}, & (h) & \dfrac{3x^2 + 4x + 5}{x^2 - x - 2}, \\
(i) & \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x - 5}, & (j) & \dfrac{2x - 5}{x^2 - 2x + 3}, \\
(k) & \dfrac{2x - 5}{x^2 - 2x - 8}, & (l) & \dfrac{1}{(\sin(x) + \cos(x))^2}, \\
(m) & \dfrac{\exp(2x)}{x^2}, & (n) & \dfrac{1}{\exp(3x) - \exp(2x)}, \\
(o) & \ln\left((x^2-4)^2\right), & (p) & \dfrac{\ln\left((x^2-4)^2\right)}{x}, \\
(q) & \ln\left(2 + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right), & (r) & \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right), \\
(s) & \tan^{-1}(x), & (t) & \mathrm{th}^{-1}(x),
\end{array}
$$

Exercice 63 Décrire le comportement limite des fonctions, données par les formules suivantes, de chaque côté de la valeur de x indiquée.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & \exp\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad x=0 & (b) & \sqrt{\mathrm{Ent}(\sqrt{x})}, \quad x=9 \\
(c) & \exp\left(\dfrac{|x|}{x}\right), \quad x=0 & (d) & \dfrac{|\sin(x)|}{\sin(x)}, \quad x=\pi \\
(e) & \dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}, \quad x=1 & (f) & \dfrac{\tan(x)}{|x|}, \quad x=0
\end{array}
$$

Exercice 64 Trouver les limites suivantes, en utilisant les règles algébriques appropriées.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-3x+4}{\cos(2x)}, & (b) & \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{2x-3}{1+\sin(x)}, \\
(c) & \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^2-2x+3}, & (d) & \lim\limits_{x\to -2} (x-1)(x-2)(x+3), \\
(e) & \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2}{x-2}, & (f) & \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x^2+2x-4}{x-3}, \\
(g) & \lim\limits_{x\to 1} |2-x-3x^2|\cos(\pi x), & (h) & \lim\limits_{x\to 0} \exp((x+2)\sin(x)), \\
(i) & \lim\limits_{x\to 1} \cosh(1-x)\sin(\pi x), & (j) & \lim\limits_{x\to\pi} \sqrt{(\exp(x)+3x-\ln(x))\sin(x)}.
\end{array}
$$

Exercice 65 Prouver par encadrement (théorème des gendarmes) que la valeur de chacune des limites suivantes est zéro.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & \lim\limits_{x\to 0} |x|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & (b) & \lim\limits_{x\to\infty} \exp(-x)\cos(x), \\
(c) & \lim\limits_{x\to -\infty} \exp(x)\sin(x^2+1), & (d) & \lim\limits_{x\to\infty} (1-\mathrm{th}(x))\cos(x), \\
(e) & \lim\limits_{x\to 1} |x-1|\cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right), & (f) & \lim\limits_{x\to\infty} \exp(\sin(x)-x),
\end{array}
$$

Exercice 66 La fonction $f(x)$ est bornée, c.-à-d., il y a les constantes A et B telles que $A \le f(x) \le B$ pour tout x dans le domaine de f. Montrer par encadrement (théorème des gendarmes) que $\lim_{x\to 0} f(x)\sin(x) = 0$.

Exercice 67 Décrire les comportements limites près des asymptotes verticales de

$$\frac{(x+1)(x-2)^2}{x(x-1)(x+2)^2}$$

Exercice 68 Évaluer les limites suivantes, en utilisant des manipulations algébriques.

$$(a)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4},\qquad (b)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2-1},$$
$$(c)\quad \lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1},\qquad (d)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\exp(2x)-1}{\exp(x)-1},$$
$$(e)\quad \lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right),\qquad (f)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1},$$
$$(g)\quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{\sqrt{5+x}-2},\qquad (h)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-\sqrt{1+2x^2}}{x^2},$$
$$(i)\quad \lim_{x\to \infty}\frac{x^4+2x^2+1}{2x^4-3x^3+x},\qquad (j)\quad \lim_{x\to \infty}\frac{x^2+2x+1}{x^3-x^2-x-1},$$
$$(k)\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3+x^2-x-1}{2x+3},\qquad (l)\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1-x^2},$$
$$(m)\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{x-4},\qquad (n)\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{|2x-5|}{3x+1},$$
$$(o)\quad \lim_{x\to \infty}\frac{x^2+x+\cos^2(x)}{2x^2-\sin^2(2x)},\qquad (p)\quad \lim_{x\to \infty}\frac{\exp(x)-\sin(x)+1}{2\exp(x)+\cos(x)-3},$$

Exercice 69 Employer la méthode de changement de variable pour évaluer les limites suivantes.

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\exp(2x)}{\exp(x)-1},\qquad (b)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)},$$
$$(c)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x}}{\sin(\sqrt{2x})},\qquad (d)\quad \lim_{x\to e}\frac{\ln^2(x)-1}{\ln(x)-1},$$
$$(e)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin^{-1}(x)},\qquad (f)\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{\sin^{-1}(\exp(x))}{\exp(x)},$$

Exercice 70 Employer la règle de l'Hôpital pour trouver les valeurs des limites suivantes.

$$(a)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-1},\qquad (b)\quad \lim_{x\to \pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi},$$
$$(c)\quad \lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec}(x)-\cot(x)),\qquad (d)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right),$$
$$(e)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(a\,x)-1}{\cos(b\,x)-1},\quad (b\neq 0)\qquad (f)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos(a\,x)}{x^2}\right),$$
$$(g)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^3(x)}{x-\tan(x)},\qquad (h)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5},$$
$$(i)\quad \lim_{x\to 0^+}x^{\sin(x)},\qquad (j)\quad \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt[3]{x}\right)^x,$$
$$(k)\quad \lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x,\qquad (l)\quad \lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}},$$

Exercice 71 Trouver des exemples de paires de fonctions $f(x)$, $g(x)$ satisfaisant les conditions suivantes lorsque $x\to\infty$:

1. $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ et $f(x)-g(x)\to 0$;
2. $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ et $f(x)-g(x)\to\infty$;
3. $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ et $f(x)-g(x)\to-\infty$;

4. $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ et $f(x) - g(x) \to 3$.

Exercice 72 La fonction f (x) est définie par

$$\frac{|x+k|}{x^2-k^2} \quad (k \neq 0).$$

Quel est le domaine de $f(x)$? Esquisser le graphe de $f(x)$ montrant les discontinuités. Employer le graphique pour trouver les valeurs des limites à gauche et à droite en chacune des discontinuités, et montrer comment prouver ces limites à l'aide de la formule pour $f(x)$.

Exercice 73 Étudier le comportement de la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^3}{x^3-y^2}$$

le long de diverses courbes passant par le point $(0,0)$.

Quatrième partie
Dérivation d'une fonction

Exercice 74 Utiliser directement la définition de la dérivée (en tant que limite) pour calculer la dérivée des fonction suivantes

$$(a)\quad x^3 \qquad (b)\quad x^{-1} \qquad (c)\quad \cos(x) \qquad (d)\quad \tan(x) \qquad (e)\quad \mathrm{e}^x$$

Exercice 75 Utiliser les règles concernant la somme, le produit, et le quotient de fonctions pour trouver la dérivée de chacune des fonctions définies par :

$$\begin{array}{llllll}
(a) & 8x^{3/4} & (b) & \sinh(x) & (c) & \mathrm{e}^v\sin(v) \\
(d) & x^2\tan(x) & (e) & t\sin(t)+\cos(t) & (f) & \mathrm{th}(x) \\
(g) & \dfrac{3x-2}{2x-3} & (h) & \dfrac{t^2+2t}{t^2-1} & (i) & \dfrac{1-4x}{x^{2/3}} \\
(j) & \dfrac{\cos(x)}{1+2\sin(x)} & (k) & \dfrac{\mathrm{e}^w}{1-\tan(w)} & (l) & \dfrac{\mathrm{e}^x\ln(x)}{x^2+2x^3}
\end{array}$$

Exercice 76 Utiliser la règle concernant les compositions de fonctions pour trouver la dérivée de chacune des fonctions définies par :

$$\begin{array}{llllll}
(a) & \cos(\sqrt{x}) & (b) & \cosh(\cos(t)) & (c) & 2^{-x} \\
(d) & \ln(\ln(\ln(x))) & (e) & \left(1+s^{2/3}\right)^{3/2} & (f) & \left(3-2t^2\right)^{-3/4} \\
(g) & \tan(\frac{1}{x}) & (h) & \sqrt{\sin(v^2)} & (i) & \sin(2\cos(3x)) \\
(j) & 3^{3^x} & (k) & \cos(\ln(x)) & (l) & \sqrt[3]{\ln(t)}
\end{array}$$

Exercice 77 En utilisant toutes les règles à votre disposition, trouver la dérivée (par rapport à x) de chacune des fonctions définies par :

(a) $\ln(x\sin(x))$	(b) $\sin\left(\dfrac{x}{\cos(x)}\right)$	(c) $\sqrt{x+\mathrm{e}^x}$
(d) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{1+x^2}$	(e) $\cosh(x\ln(x))$	(f) $\dfrac{\sin(x^2)}{\sec(x^2)}$
(g) $\tan(3x^2)\cot(3x^3)$	(h) $\tan\left(a^2(1+x^2)\right)$	(i) $2^{x\sin(x)}$
(j) $a\sin(bx)+b\sin(ax)$	(k) $\left(x^2\ln(x)\right)^{(b^2)}$	(l) $\tan^2\left(\dfrac{1}{cx^2+d}\right)$

Exercice 78 Calculer plusieurs dérivées successives de $f(x)=\sin(2x-5)$. En se basant sur les formules ainsi obtenues, déviner des formules générales pour $f^{(2n)}(x)$ et $f^{(2n+1)}(x)$. Démontrer ces formules par récurrence.

Difficile : Trouver une formule générale qui englobe les deux formules trouvées précédemment.

Exercice 79 Calculer plusieurs dérivées successives de $f(x)=\mathrm{e}^{ax}\sin(ax)$. Déviner les formules générales pour $f^{(4n)}(x)$, $f^{(4n+1)}(x)$, $f^{(4n+2)}(x)$, $f^{(4n+3)}(x)$. Les démontrer par récurrence.

Exercice 80 Affirmation : la dérivée d'une fonction impaire est paire, et la dérivée d'une fonction paire est impaire.

(a) Expliquer ce résultat à l'aide de graphes.

(b) Démontrer les affirmations en comparant les dérivées de $f(x)$ et $f(-x)$.

(c) Démontrer les affirmations en utilisant directement la définition de la dérivée en tant que limite.

(d) Peut-on penser que les affirmations réciproques sont vraies ? Explicitement, toute fonction paire (impaire), est-elle la dérivée d'une fonction impaire (paire) ? Si oui, donner une démonstration. Sinon, donner un contre-exemple. Décrire une classe de fonctions pour laquelle les affirmations réciproques sont vraies et le démontrer.

Exercice 81 La tangente au graphe de $y=x^3$ en un point P intersecte la courbe encore une fois dans un autre point Q. Déterminer les coordonnées de Q, en fonction des coordonnées de P.

Exercice 82 On considère, dans le plan, deux cercles tangents de rayon a (c.à.d., on a deux cercles du même rayon qui se touchent en un point). Il y a deux droites différentes qui traversent le centre du premier cercle et qui sont tangentes au deuxième cercle. Calculer la distance entre les deux points où les deux droites touchent le deuxième cercle.

Exercice 83 Localiser et classifier les points stationnaires des fonctions définies par

(a) x^2-6x-4	(b) $\left(x^2-1\right)^2$	(c) $x^4+4x^3-2x^2-12x-5$
(d) $\dfrac{x+1}{x^2+2}$	(e) $\dfrac{2x^2-3}{x^2+1}$	(f) $x^2\exp\left(-x^2\right)$
(g) $\ln(1+x+x^2)$	(h) $x^{4/3}-2x^{2/3}$	(i) $\lvert x^2-4\rvert$
(j) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^6}}$		

Exercice 84 Pour chacune des fonction suivantes, avec domaine de définition comme indiqué, trouver les maxima et minima locaux et globaux.

(a)	$x^2+2x-3, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2$	(b)	$x(x+1)^2, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2$
(c)	$\dfrac{2x+1}{x^2+2}, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$	(d)	$x\sqrt{3-x^2}, \quad -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$
(e)	$x-2\sin(x), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$	(f)	$\cos(2x)+2\sin(x), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$
(g)	$\dfrac{\cos(x)}{2+\sin(x)}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$	(h)	$x \cdot 3^{-x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$
(i)	$\dfrac{\ln(x)}{x^2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 5$	(j)	$\dfrac{1}{\cosh(x-1)}, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$

Exercice 85 Localiser tous les points stationnaires de la fonction $f(x) = \cos(\mathrm{e}^x)$. Il y en a combien dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 10$?

Exercice 86 On considère l'hyperbole d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$. Trouver les points sur cette hyperbole qui sont les plus proches du point $(0, a)$ sur l'axe y.

Exercice 87 Trouver une expression pour la dérivée de $\mathrm{th}^{-1}(x)$.

Exercice 88 Utiliser la formule de Leibniz pour déterminer la dérivée n-ième de chacune des fonctions suivantes.

(a) $x\ln(x)$ $\qquad$ (b) $(x^2-2x+3)\,\mathrm{e}^{2x}$ $\qquad$ (c) $x^3\,\mathrm{e}^{-x}$

Cinquième partie

Intégration et primitives

Exercice 89 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes et interpréter chaque valeur géométriquement, comme l'aire sous la courbe.

(a)	$\displaystyle\int_{-3}^{2} (3x-2)\, dx$	(b)	$\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$	(c)	$\displaystyle\int_{-1}^{3} \lvert x-2\rvert\, dx$
(d)	$\displaystyle\int_{-4}^{3} \lvert(\lvert x-2\rvert - \lvert x+2\rvert)\rvert\, dx$	(e)	$\displaystyle\int_{-2}^{2} \sinh(x)\, dx$	(f)	$\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(2x)\, dx$

Exercice 90 Calculer les primitives suivantes.

$$
\begin{array}{llllll}
(a) & \displaystyle\int (3x^2+4x-2)\ dx & (b) & \displaystyle\int \sqrt{3x-1}\ dx & (c) & \displaystyle\int \left(x^3-2\right)^2\ dx \\
(d) & \displaystyle\int \left(\sqrt{x}+x^2\right)^3\ dx & (e) & \displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)\ dx & (f) & \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx \\
(g) & \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\ dx & (h) & \displaystyle\int e^{2x+3}\ dx & (i) & \displaystyle\int 2^{-x}\ dx \\
(j) & \displaystyle\int \cosh(3x)\ dx & (k) & \displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\ dx & (l) & \displaystyle\int \sec^2(x)\ dx \\
(m) & \displaystyle\int \cos^2(x)\ dx & (n) & \displaystyle\int \sin(2x)\sin(5x)\ dx & &
\end{array}
$$

Exercice 91

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a(t)$ et $b(t)$ des fonctions dérivables et F une primitive de f. Montrer que la dérivée par rapport à t de la fonction définie par
$$G(t)=\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)dx$$
est $f(b(t))b'(t)-f(a(t))a'(t)$. Indication : utiliser $G(t)=F(b(t))-F(a(t))$.
2. Déterminer de deux façons la dérivée par rapport à t de la fonction définie par
$$G(t)=\int_{t^2}^{t^3} e^x\ dx.$$
   (a) Intégrer d'abord, puis dériver.
   (b) Utiliser la formule pour la dérivée vue en cours.

Exercice 92 Déterminer la dérivée par rapport à t de la fonction définie par

$$G(t)=\int_{\sin(t)}^{\cos(t)} e^{(x^2)}\ dx$$

Exercice 93 Pour chacune des intégrales infinies suivantes, déterminer si elle est convergente.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2}\ dx & (b) & \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx \\
(c) & \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(3x+2)^{\frac{2}{3}}}\ dx & (d) & \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{2-3x}\ dx
\end{array}
$$

Exercice 94 Utiliser un test de comparaison pour démontrer que les intégrales infinies suivantes sont convergentes.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\ dx & (b) & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(x)}}{1+x^2}\ dx \\
(c) & \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x-2}}{x^3+x+4}\ dx & (d) & \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(x^3+x-3)}\ dx
\end{array}
$$

Exercice 95 Utiliser le teste de comparaison des intégrales infinies pour démontrer le résultat suivant : *Supposons que f et g sont continues, et que pour tout $x \geqslant a$ on a $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$. Alors, si l'intégrale infinie $\int_a^\infty g(x)\, dx$ ne converge pas, alors l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\, dx$ ne converge pas, non plus.*

Exercice 96 Pour chacune des intégrales impropres suivantes, décider si elle est convergente. Pour celles qui le sont, déterminer leur valeur.

$$(a)\quad \int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\, dx \qquad\qquad (b)\quad \int_{-1}^3 \frac{1}{x+1}\, dx$$
$$(c)\quad \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx \qquad\qquad (d)\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cosec}^2(x)\, dx$$

Exercice 97 Déterminer les valeurs de p pour lesquelles l'intégrale impropre $\int_0^1 x^{-p}\, dx$ est convergente.

Exercice 98 Formuler un théorème concernant des intégrales *impropres* analogue au théorème concernant le teste de comparaison pour les intégrales *infinies*. Donner une démonstration de ce théorème semblabe à la démonstration concernant les intégrales infinies.

Exercice 99 Utiliser un test de comparaison pour démontrer que les intégrales impropres suivantes sont convergentes

$$(a)\quad \int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx \qquad\qquad (b)\quad \int_{-2}^2 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x+2}}\, dx$$

Exercice 100 Calculer les primitives suivantes.

$$(a)\quad \int x \cdot \sinh(x)\, dx \qquad (b)\quad \int x^2 \cdot e^x\, dx \qquad (c)\quad \int x^2 \cdot \cosh(3x)\, dx$$
$$(d)\quad \int x \cdot (\ln(x))^2\, dx \qquad (e)\quad \int x^2 \cdot \cos(x)\, dx \qquad (f)\quad \int x \cdot \operatorname{Arctan}(x)\, dx$$
$$(g)\quad \int x \cdot \cos^2(x)\, dx \qquad (h)\quad \int \sqrt{x} \ln(\sqrt{x})\, dx \qquad (i)\quad \int (x+1) \cdot e^x \cdot \ln(x)\, dx$$
$$(j)\quad \int \operatorname{Arccos}(x)\, dx$$

Exercice 101 Utiliser l'intégration par parties pour déterminer $\int e^{ax} \cos(bx)\, dx$.

Exercice 102 Calculer la primitive $\int \sec^3(x)\, dx$ en écrivant $\sec^3(x) = \sec(x) \cdot \sec^2(x)$, et en utilisant l'intégration par parties.

Exercice 103 Trouver une formule récursive pour

$$I_n := \int_1^e x \cdot (\ln(x))^n\, dx.$$

En utilisant cette formule, calculer $\int_1^e x \cdot (\ln(x))^4\, dx$.

Exercice 104 Soit
$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\ dx.$$
En écrivant $\cos^n(x) = \cos(x) \cdot \cos^{n-1}(x)$, démontrer que
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$
En utilisant cette formule récursive calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(x)\ dx$.

Exercice 105 Trouver une formule récursive pour
$$\int_0^1 x^n e^{2x}\ dx.$$
En utisant la formule ainsi trouvée, calculer explicitement l'intégrale dans le cas $n = 7$.

Exercice 106 Calculer les primitives suivantes en utilisant des substitutions convenables.

(a) $\displaystyle\int 3x^2(x^3+4)^{20}\ dx$ (b) $\displaystyle\int x(x^2-6)^{\frac{4}{3}}\ dx$ (c) $\displaystyle\int (x^2+1)\sqrt[3]{x^3+3x-2}\ dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{2x^3+5}\ dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{4+x^6}\ dx$ (f) $\displaystyle\int \cos(x)\sin^7(x)\ dx$

(g) $\displaystyle\int \tan^5(x)\sec^2(x)\ dx$ (h) $\displaystyle\int x^2\cos(2x^3)\ dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx$

(j) $\displaystyle\int x \cdot \exp(x^2-2)\ dx$ (k) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\ dx$ (l) $\displaystyle\int 2\sin(x)\cos(x)e^{\cos(2x)}\ dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}\ dx$ (n) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+2e^{-x}}\ dx$

Exercice 107 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes en utilisant des substitutions convenables.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\exp(x^3)\ dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 x^4 \cdot (x^5-1)^6\ dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sqrt{\sin(x)}\ dx$ (d) $\displaystyle\int_{\ln(7)}^{\ln(26)} e^x\sqrt[3]{1+e^x}\ dx$

Exercice 108 Calculer les primitives suivantes en utilisant des substitutions convenables.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}\ dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}\ dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-9x^2}}\ dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\ dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}\ dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\ dx$ (h) $\displaystyle\int \sqrt{4x^2-8x+24}\ dx$

Exercice 109 Calculer les primitives suivantes en utilisant des substitutions du type "moitié de l'angle".

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{5+3\cos(t)}\ dt$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(t)+\sin(t)+1}\ dt$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos(t)}\ dt$ (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+3\cos(t)-\sin(t)}\ dt$

Exercice 110 Calculer les primitives suivantes en utilisant des substitutions convenables.

$$(a) \quad \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+4\sin(x)+\sin^2(x)}}\,dx \qquad (b) \quad \int \frac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}\,dx$$

Exercice 111 Calculer les primitives des fonctions rationnelles suivantes

$$\begin{array}{llllll}
(a) & \dfrac{7}{x^2-5x-6} & (b) & \dfrac{3x-11}{x^2-5x+6} & (c) & \dfrac{3}{x^2+4x+13} \\
(d) & \dfrac{2x+3}{x^2+6x+10} & (e) & \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4x+5} & (f) & \dfrac{x^3+2x^2-x-1}{x^2+6x+13} \\
(g) & \dfrac{3x-1}{x^2+4x+4} & (h) & \dfrac{5x^2+4}{x^3-3x^2+3x-1} & (i) & \dfrac{2x^2-11}{x^2+6x+9} \\
(j) & \dfrac{x^2+1}{x^3+x^2+3x-5} & (k) & \dfrac{x^3-x^2+4}{x^3+x^2+3x-5} & (l) & \dfrac{25x}{x^4-x^2-2x+2} \\
(m) & \dfrac{2x^2-3x+4}{x^4-2x^2+1} & (n) & \dfrac{x^2+3x-2}{(x^2-4x+5)^2} & &
\end{array}$$

Sixième partie

Les fonctions de deux ou trois variables réelles

Exercice 112 Calculer $\frac{\partial}{\partial x}(f)$, $\frac{\partial}{\partial y}(f)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f)$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(f)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(f)$ et $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(f)$ dans les cas suivants :

$$\begin{array}{llllll}
(a) & f(x,y)=x^n y^m & (b) & f(x,y)=\ln(x+y) & (c) & f(x,y)=\cos(\exp(x)+\ln(y)) \\
(d) & f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y} & (e) & \sqrt{x^2+y^2} & (f) & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}
\end{array}$$

Exercice 113 Rechercher les extremums locaux de la fonction f définie par

$$f(x,y)=2x^2-2y^2-x^4.$$

Exercice 114 (a) Soit f définie par

$$f(r,s)=(\cos(r),\sin(r),s)$$

si $(r,s)\in[0,2\pi[\times[0,1]$. Dessiner $f([0,2\pi[\times[0,1])$.

(b) Soit g définie par

$$g(r,s)=(\cos(r)\times\cos(s),\sin(r)\cos(s),\sin(s))$$

si $(r,s)\in[0,2\pi[^2$. Dessiner $g([0,2\pi[^2)$.

(c) Soit h définie par

$$h(r,s)=(\cos(r)\times(2+\cos(s)),\sin(r)\times(2+\cos(s)),\sin(s))$$

si $(r,s)\in[0,2\pi[^2$. Dessiner $h([0,2\pi[^2)$.