Pass option Maths
CMP3
05/04/2023

0. Fonctions de deux variables et extremum, exemples.

0.0. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$

1/ Calculer f'_x qui se note $\frac{\partial f}{\partial x}$ et f'_y qui se note $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$

2/ Montrer que si f admet un extremum c'est en $(0,0)$

Soit $m = (x_m, y_m)$ un point où f admet un extremum c'est à dire un point m tel que

- soit pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x,y) \leq f(m)$ et alors f a un maximum en m
- soit pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x,y) \geq f(m)$ et alors f a un minimum en m.

En un tel point $\frac{\partial f}{\partial x}(m) = \frac{\partial f}{\partial y}(m) = 0$

Par conséquent c'est un point qui vérifie

$$2x_m = 0 \qquad 2y_m = 0$$

c'est à dire $m = (0,0)$.

3/ Montrer que f n'a pas d'extremum.

S'il y en a un c'est $O = (0,0)$.

On $f(O) = 0^2 - 0^2 = 0$

et $f(1,0) = 1^2 - 0^2 = 1 > 0 = f(O)$

Par conséquent $O = (0,0)$ n'est pas un maximum.

de plus $f(0,1) = 0^2 - 1^2 = -1 < 0 = f(O)$

Par conséquent $O = (0,0)$ n'est pas un minimum.

Ainsi $O=(0,0)$ qui est le seul point où f peut être extremale n'est pas un point où f atteint un extremum. Par conséquent f n'a pas d'extremum.

Q.1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2+3y^2+2x+y+1$$

1/ Calculer $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$

2/ rechercher m tel que $f'_x(m) = f'_y(m) = 0$

3/ Montrer que f atteint un minimum en m

1/ $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+2 = f'_x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y+1 = f'_y$

2/ $f'_x(m) = 0$ et $f'_y(m) = 0$ avec $m = (x_m, y_m)$

est équivalent à

$$2x_m + 2 = 0 \quad \text{et} \quad 6y_m + 1 = 0$$

c'est à dire $m = \left(-1, -\frac{1}{6}\right)$

3/ Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Calculons $f(x,y) - f(m)$ sachant que

$$f(x,y) = x^2+3y^2+2x+y+1$$

$$f(x,y) - f(m) = x^2+3y^2+2x+y+1 - \left(1^2+3\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 2.1 - \frac{1}{6} + 1\right)$$

$$= (x+1)^2 - 1 + 3\left(y+\frac{1}{6}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 1 - \left(1+3\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 2.1 - 1/6 + 1\right)$$

$$= (x+1)^2 + 3\left(y+\frac{1}{6}\right)^2 + c$$

où $c = -1 - 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 1 - \left(1+3\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 2.1 - \frac{1}{6} + 1\right)$

Or $f(x_m, y_m) - f(m) = f(m) - f(m) = 0$

et $x_m = -1$ et $y_m = -\frac{1}{6}$ donc

$$(x_m+1)^2 + 3\left(y_m + \frac{1}{6}\right)^2 = 0$$

Par conséquent $c = 0$

On a donc $f(x,y) - f(m) = (x+1)^2 + 3\left(y+\frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$

Par conséquent f atteint un minimum en m.

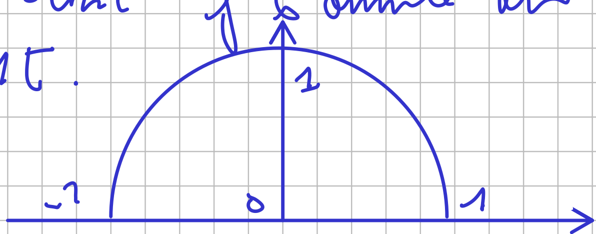
1) Enoncer le théorème de Rolle.

Théorème de Rolle. Soit $a<b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
On suppose f continue sur $[a,b]$ et f dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

Exemple. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

La fonction f est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ ouvert et $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

De plus $f(-1) = f(1) = 0$ et donc f' s'annule au moins une fois sur $]-1,1[$.



2/ Calculer $\int_0^x t\cos(t)\,dt$ si $x \in \mathbb{R}$.

On procède par intégration par parties en posant
$t = u$ et $\cos(t) = v'$
donc $1 = u'$ et $\sin(t) = v$

On a donc $\int_0^x t\cos(t)\,dt = [t\sin(t)]_0^x - \int_0^x \sin(t)\,dt$

On $\cos' = -\sin$ donc

$$\int_0^x t\cos(t)\,dt = [t\sin(t)]_0^x - [-\cos(t)]_0^x$$
$$= [t\sin(t)]_0^x + [\cos(t)]_0^x$$
$$= x\sin(x) - 0.\sin(0) + \cos(x) - \cos(0)$$
$$= x\sin(x) + \cos(x) - 1$$

Ainsi $\left\| \int_0^x t\cos(t)\,dt = x\sin(x) + \cos(x) - 1 \right.$

3/1. Montrer que si $x > 0$ $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

On a si $a, b > 0$ $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$

On $\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{x}\,dx = 0$

Mais si $x > 0$ $1 = \frac{x}{x} = x \times \frac{1}{x}$

Ainsi $0 = \ln(1) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Par conséquent $\left\| \ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) \right.$

3/2. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que
si $x \in \mathbb{R}$ alors $(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}$ (P_n).

Initialisation. $\sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1$ par définition de x^0 si $x \in \mathbb{R}$.

Donc $(1-x)\sum_{k=0}^{0} x^k = (1-x)\times 1 = (1-x) = 1-x^1 = 1-x^{0+1}$

Ainsi (P_0) est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose (P_n) vraie.

Prouvons que sous cette hypothèse (P_{n+1}) vraie.

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n+1} x^k = (1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1}\right) \leftarrow \text{par définition de } \Sigma$$

$$= \underbrace{(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k}_{=} + (1-x)x^{n+1} \leftarrow \text{distributivité de } \times \text{ par rapport à } +$$

$$= 1-x^{n+1} + (1-x)x^{n+1} \leftarrow \text{l'hypothèse } (P_n) \text{ vraie}$$

$$= 1-x^{n+1} + x^{n+1} - x\,x^{n+1} \leftarrow \text{calculs usuels.}$$

$$= 1-x^{n+2} \leftarrow$$

Ainsi sous l'hypothèse (P_n) on a si $x \in \mathbb{R}$ $(1-x)\sum_{k=0}^{n+1} x^k = 1-x^{n+2}$ et donc (P_{n+1}) est vraie. La propriété est donc héréditaire.

Puisque (P_0) est vraie et que (P_n) est héréditaire Pascal nous indique que (P_n) est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

3/2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

On a d'après ce qui précède

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}$$

Puisque $x \in [0, \frac{1}{2}]$ $1-x \neq 0$ et donc on a en divisant par $1-x$

$$(\mathrm{I}) \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

puisque $x \in [0, \frac{1}{2}]$ on a $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

et donc · $0 \leq x$ et $1-x > 0$ et ceci entraîne $\frac{x^{n+1}}{1-x} \geq 0$

· de plus $x \leq \frac{1}{2}$ donc $x^{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

et $1-x \geq 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et donc

$$\frac{1}{1-x} \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$

Par conséquent $\frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times 2$

et donc $$(\mathrm{II}) \quad 0 \leq \frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Par conséquent, si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, les

Combinant

(I) $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$

et (II) $0 \leq \frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

on obtient

$0 \leq \frac{x^{n+1}}{1-x}$ $\qquad\qquad$ $\frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \leq \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \sum_{k=0}^{n} x^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

si $x \in [0, \frac{1}{2}]$

Ainsi si $x \in [0, \frac{1}{2}]$

on a $\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k \leq \frac{1}{1-x} \leq \sum_{k=0}^{n} x^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

3/4. Montrer que si $x \in [0, 1/2]$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x)$$

Il suffit de montrer que $-\ln(1-x)$ est la primitive de $\frac{1}{1-x}$ qui s'annule en $x=0$ et pour le faire il suffit de montrer que si on pose $f(x) = -\ln(1-x)$ pour $x > 0$

on a $f(0) = 0$ et f dérivable et $f'(x) = \frac{1}{1-x}$.

On a bien $f(0) = -\ln(1-0)$
$= -\ln(1)$
$= -0$
$= 0$

Puisque $\ln' = \frac{1}{x}$ et que $(1-x)' = -1$,

si on pose $g = \ln$ et $h = 1-x$
On a $g' = \frac{1}{x}$ $h' = -1$
on a $f = -g \circ h$ donc $f' = -g' \circ h \times h'$

c'est à dire $f'(x) = -\frac{1}{(1-x)} \times (-1) = \frac{1}{1-x}$.

Ainsi f définie par $f(x) = -\ln(1-x)$
est bien la primitive de $\frac{1}{1-x}$ qui s'annule en 0. On a donc

$\forall x > 0 \quad \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x)$

3/5. Soit $f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} x^k$ et $g(x) = f(x) + \left(\frac{1}{2}\right)^n x$

On a $\forall k \in \mathbb{N}$ $(x^k)' = k\,x^{k-1}$

donc $f'(x) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} x^k\right)'$
$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} (x^k)'$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} k x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^{k}$$

Ainsi $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$

De même $g'(x) = \left(f(x) + \left(\frac{1}{2}\right)^n x\right)'$

$$= f'(x) + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Finalement si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ $\quad f'(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3/6. On a si $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$$f'(x) \leq \left(-\ln(1-x)\right)' = \frac{1}{1-x} \leq g'(x)$$

et $f(0) = -\ln(1-0) = 0 = g(0)$

On en déduit que sur $[0, \frac{1}{2}]$

$g'(x) - \left(-\ln(1-x)\right)' \geqslant 0$ et donc

$g(x) - (-\ln(1-x))$ est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$

et puisque c'est nul en 0 on a donc

$g(x) - (-\ln(1-x)) \geqslant 0$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ $(*)$

De même $\left(-\ln(1-x)\right)' - f(x) \geqslant 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$

et donc $(-\ln(1-x)) - f(x)$ est croissante sur

$[0, \frac{1}{2}]$ et puisque c'est nul en 0 on a donc

$(-\ln(1-x)) - f(x) \geqslant 0$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ $(**)$

En combinant $(*)$ et $(**)$

pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$ $\quad f(x) \leq -\ln(1-x) \leq g(x)$

et donc

Pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$ $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} \leq -\ln(1-x) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \left(\frac{1}{2}\right)^n x$

3/7. Soit $x = \frac{1}{2}$. D'après ce qui précède si $n \in \mathbb{N}$

(Δ_n) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{2}$

Or $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

et $\ln(2) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ car $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Appliquons Δ_n avec $n=1$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{5/8} \leq -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\frac{5}{8}} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{4+1}{8} = \frac{5}{8} \leq \ln(2) \leq \frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$$

Ainsi $\left\| \frac{5}{8} \leq \ln(2) \leq \frac{7}{8} \right.$