Pass option Maths
CMP3
29/03/2023

Nouvel exemple d'intégration par parties.

Calcul de $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ défini par

$$f(x)=\underbrace{\int_0^x \underline{\cos(t)}\,\underline{\exp(t)}\,dt}$$

Essayons de faire une intégration par partie en posant

$\underline{u}=\cos(t)$ donc $\underline{u'}(t)=-\sin(t)$

$\underline{v}=\exp(t)$ donc $\underline{v'}(t)=\exp(t)$

$$f(x)=\left[\cos(t)\exp(t)\right]_0^x\ \boxed{-}\int_0^x -\underline{\sin(t)}\ \underline{\exp(t)}\,dt \rightarrow \oplus$$

Recommençons une intégration par partie en posant

$\underline{u}=\sin(t)$ donc $\underline{u'}(t)=\cos(t)$

$\underline{v}=\exp(t)$ donc $\underline{v'}(t)=\exp(t)$

on obtient $f(x)=\left[\cos(t)\exp(t)\right]_0^x+\left[\sin(t)\exp(t)\right]_0^x-\overbrace{\int_0^x\cos(t)\exp(t)\,dt}^{f(x)}$

Par conséquent $2f(x)=\left[\cos(t)\exp(t)+\sin(t)\exp(t)\right]_0^x$

$$2f(x)=(\cos(x)\exp(x)+\sin(x)\exp(x))-(\cos(0)\exp(0)+\sin(0)e^0)$$

$$2f(x)=\cos(x)\exp(x)+\sin(x)\exp(x)-\underline{1}$$

Ainsi $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\cos(x)\exp(x)+\sin(x)\exp(x)-1\right)$

Nouvel exemple. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Esquisse du calcul de

$$f_n(x)=\int_0^x \underline{t^n}\,\underline{\exp(t)}\,dt.$$

Intégration par parties avec $\underline{u} = t^n$ donc $\underline{u'} = n t^{n-1}$

$\underline{v} = \exp(t)$ et $\underline{v'} = \exp(t)$

$$f_n(x) = \left[t^n \exp(t)\right]_0^x - \int_0^x n\, t^{n-1} \exp(t)\,dt$$

$$= x^n \exp(x) - n f_{n-1}(x)$$

On peut montrer par récurrence que

$$f_n(x) = x^n \exp(x) - n\, x^{n-1} \exp(x) + \dots\dots + (-1)^{n-1} x \exp(x) + (-1)^n \exp(x).$$

(à vérifier).

<u>En un exemple</u> Calcul de $f(x) = \int_1^x \ln(t)\,dt$ si $x>0$.

On écrit $\ln(t) = \underline{1}.\underline{\ln(t)}$ et on pose

$\underline{u} = \ln(t)$ donc $\underline{u'}(t) = \frac{1}{t}$

$\underline{v} = t$ donc $\underline{v'}(t) = 1$

On intègre par parties $f(x) = \int_1^x \ln(t)\,dt = \int_1^x \underset{u'}{1}.\overset{v}{\ln(t)}\,dt$

On obtient $f(x) = \left[t\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\,dt$

$$= \left[t\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x 1\,dt$$

$$= x\ln(x) - (x-1)$$

$$= x\ln(x) - x + 1$$

Ainsi, si $x>0$ $\int_1^x \ln(t)\,dt = x\ln(x) - x + 1$.

Calcul d'intégrale par changement de variable

Le contexte : soit $F : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $\varphi : I \to J$ une fonction dérivable

On pose $f = F \circ \varphi$. On a $f' = F' \circ \varphi \times \varphi'$

Par conséquent si on doit calculer

$$\int_\alpha^\beta u(t)\,dt$$

et u s'écrit sous la forme $u = F' \circ \varphi \times \varphi'$ on obtient

$$\int_\alpha^\beta u(t)\,dt = \left[f\right]_\alpha^\beta$$

Par exemple que vaut $\int_\alpha^\beta \underline{\cos}(\underline{x^3})\, \underline{x^2}\,dx$

Si on pose $\begin{cases} \underline{x^3} = \varphi(x) \text{ donc } \varphi'(x) = \underline{3x^2} \\ \underline{\cos}(t) = \underline{F'}(t) \quad \underline{F}(t) = \underline{\sin}(t) \end{cases}$

Il vient que $\int_\alpha^\beta \cos(x^3)\, x^2\,dx = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\, \varphi'(t)\,dt$

Donc $\int_\alpha^\beta \cos(x^3) = \frac{1}{3}\overset{f}{\left[F \circ \varphi\right]}_\alpha^\beta = \frac{1}{3}\left[\sin(x^3)\right]_\alpha^\beta$

$$= \frac{1}{3}\left[\sin(\beta^3) - \sin(\alpha^3)\right].$$

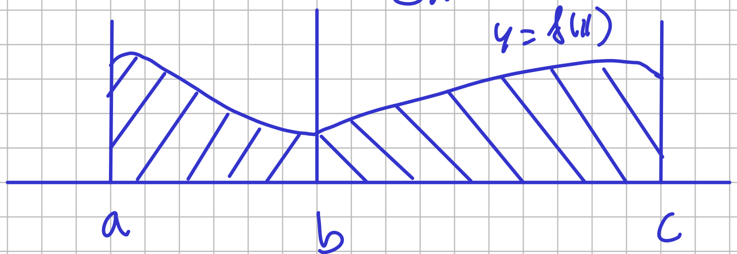
Linéarité de l'intégrale et relation de Chasles

L'intégrale possède les propriétés suivantes

1. $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2. $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

3. $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$



Le logarithme (népérien) vu comme primitive.

Définition On appelle logarithme népérien la fonction de $]0,+\infty[$ ds $\mathbb{R}$ qui est la primitive de $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{si } x > 0$$

$$\text{et } \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Propriété
- Le logarithme népérien s'annule en 1 : $\ln(1) = 0$
- Si $x, y \in]0,+\infty[$ $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

Preuve.
- $\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = \ln(1) - \ln(1) = 0$
- $\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,dt$

$$= \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt$$

On va faire un changement de variable

On pose $s = \frac{t}{x}$ donc $s' = \frac{1}{x}$ et

$t = xs$ $t' = x$

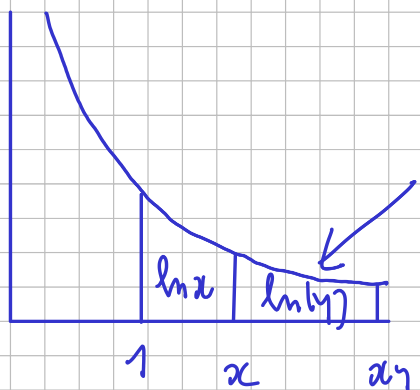
lorsque $t \in [x, xy]$ $s \in [1, y]$

On a donc $\int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^y \frac{1}{sx}\, x\, ds = \int_1^y \frac{1}{s}\, ds$

On a donc $\ln(xy) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt$

$$= \int_1^x \frac{1}{t}\, dt + \int_1^s \frac{1}{s}\, ds$$

$$= \ln(x) + \ln(y)$$



Pour calculer $\int_x^{xy} \frac{1}{dt}\, dt$ on a fait un changement d'échelle en $\frac{1}{x}$ horizontalement et en x verticalement et on constate que

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt = \int_s^y \frac{1}{s}\, ds.$$

D'autres propriétés du logarithme.

1° $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

2. $\ln(x^n) = n\ln(x)$ si $n \in \mathbb{N}$

3. $\ln(x^\lambda) = \lambda \ln(x)$

Preuve 1. $\ln(1) = 0$ mais $1 = \frac{x}{x} = x \times \frac{1}{x}$

On a donc $0 = \ln(1) = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Ainsi $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

2. $\ln(x^n) = \ln(x^{n-1} \times x) = \ln(x^{n-1}) + \ln x$ si $n \in \mathbb{N}^*$. De plus $\ln(x^0) = \ln(1) = 0$

Par récurrence on prouve que $\ln(x^n) = n\ln(x)$

3. On suppose connaître $\exp(x)$ comme réciproque de $\ln(x)$: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ bijection strictement croissante continue dérivable

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$
$$\exp'(x) = \exp(x)$$

et $\ln \circ \exp = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ $\exp \circ \ln = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{+*}}$

On pose par définition

$$x^\lambda = \exp(\lambda \ln(x))$$

On a donc $\ln(x^\lambda) = \ln(\exp(\lambda \ln(x)))$

$= \lambda \ln(x)$

Remarque On peut vérifier que si $n \in \mathbb{N}$

x^n défini par $x^0 = 1$ et $x^{n+1} = x^n \times x$ est bien égale à $\exp(n\ln(x))$

Fonction de deux ou trois variable.

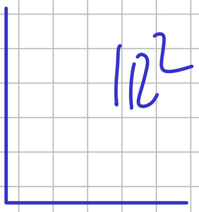
Def Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique

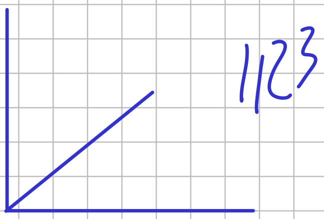
- Si $E \subset \mathbb{R}^2$ on dit que f est une fonction de deux variables.
- Si $E \subset \mathbb{R}^3$ on dit que f est une fonction de trois variables.

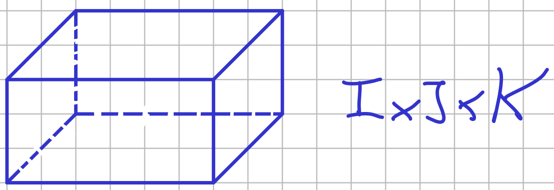
Généralement $E = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $I \times J$ ou $I \times J \times K$ où I, J, K sont des intervalles, $B_a(r)$

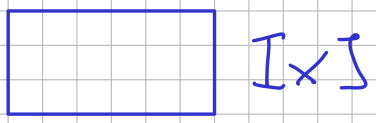
avec $B_a(r) = \{(x-a_x)^2 + (y-a_y)^2 < r^2\}$

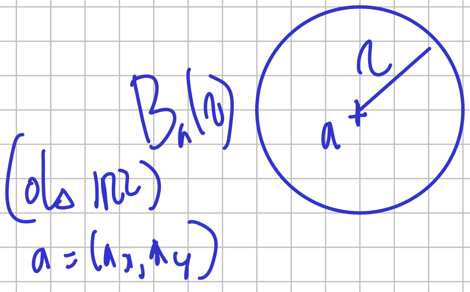
ou $B_a(r) = \{(x-a_x)^2 + (y-a_y)^2 + (z-a_z)^2 < r^2\}$

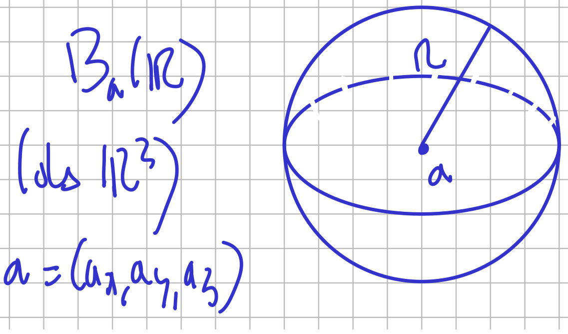












Def Soit f_1, f_2 ou f_1, f_2, f_3 des fonctions numériques définies sur $E \subset \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Alors $f = (f_1, f_2)$ ou $f = (f_1, f_2, f_3)$ est une application de E dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Def Dans certains cas on peut dériver les fonctions numériques par rapport à chaque variable.

Exemples • $f(x,y) = x^2+y^2$

On peut dériver
$$\left\{\begin{array}{ll} f \,/\, x & f'_x = 2x \\ f \,/\, y & f'_y = 2y \end{array}\right.$$

• $f(x,y) = \exp(x+y) + \sin y + xy$

$$f'_x = \exp(x+y) + y$$

$$f'_y = \exp(x+y) + \cos y + x$$

On peut poursuivre

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \exp(x+y) + 1$$

$$f''_{yx} = (f'_y)'_x = \exp(x+y) + 1$$

On a $f''_{xy} = f''_{yx}$ C'est général, presque toujours quand on peut dériver plusieurs fois on a $f''_{xy} = f''_{yx}$ c'est le

Théorème de symétrie de Schwarz

Résultat important : Si E est du type précédent et si f atteint un maximum ou un minimum en a et qu'elle est dérivable par rapport à chaque variable alors

∘ $f'_x(a) = f'_y(a) = f'_z(a) = 0$ $(\mathbb{R}^3)$

ou

∘ $f'_x(a) = f'_y(a) = 0$ $(\mathbb{R}^2)$

(dans le cas $E = I \times J$ ou $E = I \times J \times K$ on suppose les intervalles ouverts).

Exemples d'application :

∘ Soit
$$f :]0,+\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{1}{x+y}$$

Montrons que f n'a pas de maximum ou de minimum.

On calcule $f'_x = -\frac{1}{(x+y)^2}$ $f'_y = -\frac{1}{(x+y)^2}$

On f'_x et f'_y sont toujours non nulles.
D'après le résultat sur les maximum / minimum il ne peut y en avoir

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y,z) \longmapsto x^2+y^4+\cos(z)$

Donner des points de $\mathbb{R}^3$ qui pourraient être des maximum ou des minimum.

$f'_x = 2x$ $f'_y = 4y^3$ $f'_z = -\sin z$

Par conséquent si $a = (x_a, y_a, z_a)$ est un minimum ou un maximum de f alors

$2x_a = 0$ $4y_a^3 = 0$ $-\sin(z_a) = 0$

Donc $x_a = y_a = 0$ et $z_a \in \pi\mathbb{Z}$

$\square$