Pass option Maths
CMP3
22/03/2023

• Retour sur $|x|$. On a vu que cette fonction qui est continue, n'est pas dérivable en 0. On observe que c'est par un artifice qu'on définit la valeur absolue, en recollant x sur $[0,+\infty[$ et $-x$ sur $]-\infty,0]$. Il est vrai que si on recolle au hasard, deux fonctions "classiques" (i.e. définies par une formule par exemple) on a peu de chances d'obtenir une fonction continue et encore moins une fonction dérivable partout. Cependant la valeur absolue peut aussi être définie par une formule : $|x| = \sqrt{x^2}$.

En revanche dès qu'on s'intéresse à la racine carrée, il y a des difficultés avec les complexes. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe $r>0$ et $\theta \in [0,2\pi[$ uniques tels que $z = re^{i\theta}$.
Alors on a que

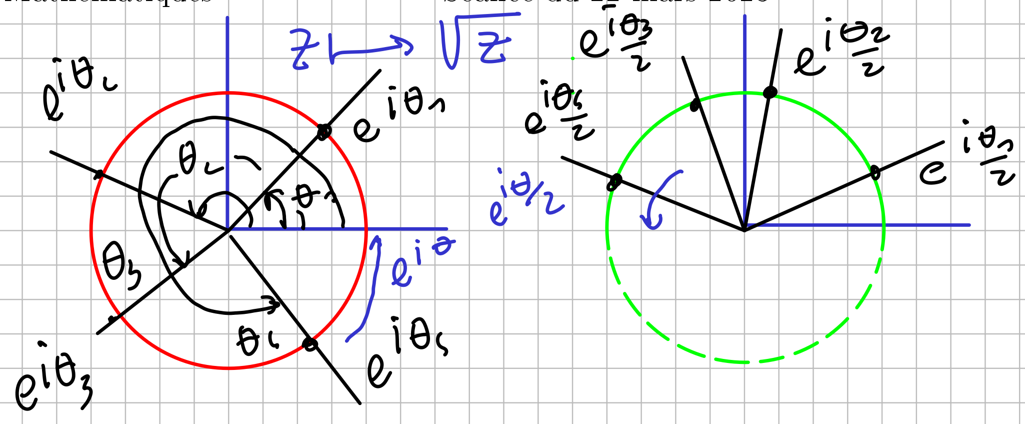
$$\left(\sqrt{r}\, e^{i\theta/2}\right)^2 = \sqrt{r}^2 \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = r\, e^{2i\theta/2} = r e^{i\theta} = z$$

Si on pose $\sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$ et si on s'intéresse à l'application

$$f : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \theta \longmapsto f(\theta) = e^{i\theta}$$

alors on a $f(0) = f(2\pi) = 1$ $\qquad \sqrt{f(\theta)} = e^{\frac{i\theta}{2}}$

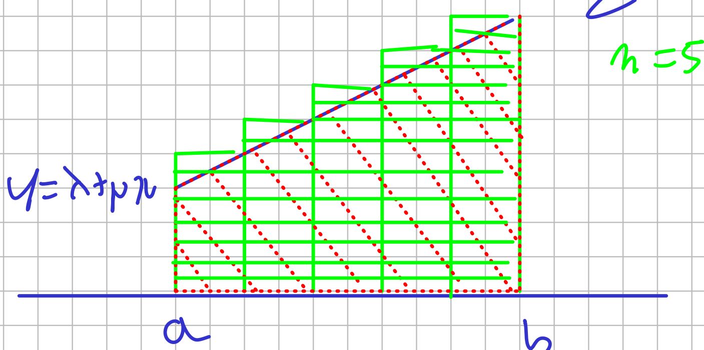
donc $\sqrt{f(0)} = 1$ et $\sqrt{f(2\pi)} = e^{\frac{i2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$



Retour sur la pertinence de l'étude des primitives et des intégrales.

On a obtenu que si n tend vers $+\infty$ l'aire verte hachurée ci-dessous est égale à la limite à

$$(b-a)(\lambda+\mu a)+\frac{(b-a)^2}{2}\mu .$$



On doit s'assurer que cette limite vaut

$$\int_a^b (\lambda+\mu x)\,dx$$

c'est à dire $\lambda(b-a)+\frac{1}{2}\mu(b^2-a^2)$ car $(\lambda x+\frac{1}{2}\mu x^2)'=\lambda+\mu x$

On a $(b-a)(\lambda+\mu a)+\frac{\mu}{2}(b^2-a^2)=\lambda(b-a)+\mu\left[\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)+(b-a)a\right]$

$$=\lambda(b-a)+\mu\left[\frac{(b-a)(b+a)}{2}+(b-a)a\right]$$

Partie complétée après la séance.

$$=\lambda(b-a)+\mu(b-a)\left[\frac{b-a}{2}+a\right]$$

$$=\lambda(b-a)+\mu(b-a)\frac{(b+a)}{2}$$

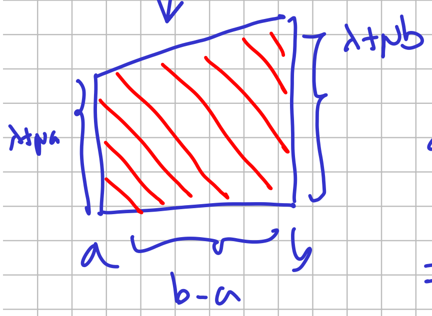
$$=\lambda(b-a)+\mu\frac{(b^2-a^2)}{2}$$

Calcul fait en fin de séance le 15/03/23

$$=\int_a^b(\lambda+\mu x)\,dx$$

On doit retrouver l'aire du trapèze en rouge.

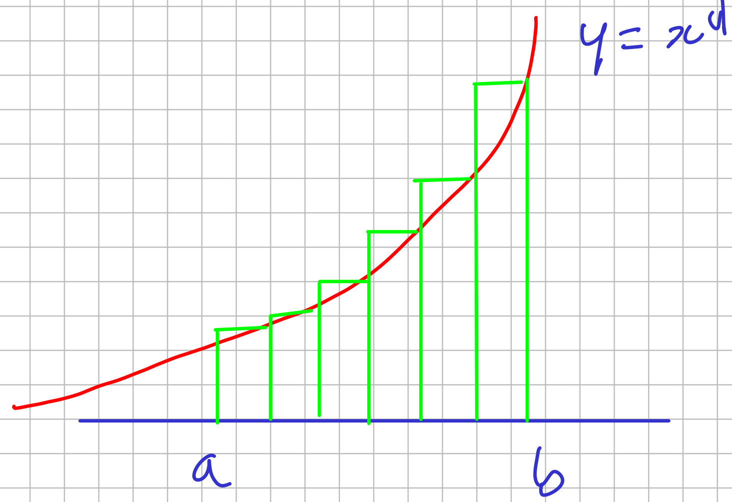
Cette aire vaut $\frac{1}{2}(b-a)\left[\lambda+\mu a + \lambda+\mu b\right]$



$$\lambda(b-a) + \frac{1}{2}\mu(b-a)(b+a)$$

$$= \lambda(b-a) + \frac{1}{2}\mu(b^2-a^2)$$

De façon générale regardons ce qui se passe avec $f(x) = x^d$ intéressons nous à l'"aire" bordée par le graphe de x^d, l'axe des x, la droite $x=a$ et la droite $x=b$



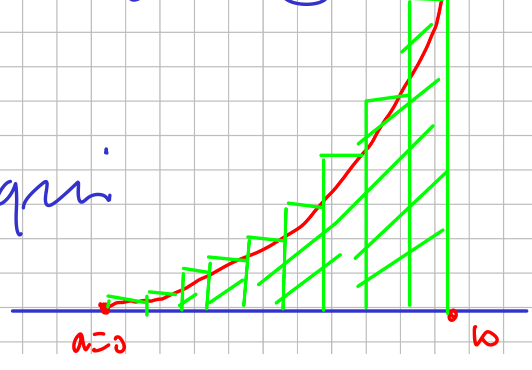
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$ et

$$f_i = f(a_i) = a_i^d$$

On va s'intéresser au cas où $a = 0$

On a alors $a_i = i\frac{b}{n}$

On considère l'aire A_n qui correspond à la zone verte



hachurée. C'est donc la somme des aires des rectangles bornés par Ox, $x = a_{i-1}$, $x = a_{i+1}$ et $y = f(a_i) = a_i^d$ et $a_i = i\frac{b}{n}$ et $a_{i-1} = (i-1)\frac{b}{n}$

L'aire de chaque rectangle est donc

$$(a_i - a_{i-1}) \times f(a_i) = \left(i\frac{b}{n} - (i-1)\frac{b}{n}\right)\left(i\frac{b}{n}\right)^d$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^d i^d$$

L'aire totale hachurée A_n vaut donc

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(a_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^d i^d$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^d \sum_{i=1}^{n} i^d$$

La théorie dit que la suite A_n, quand n tend vers $+\infty$ tend vers la variation de la primitive de x^d entre $0 = a$ et b

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = \left[\frac{1}{d+1} x^{d+1}\right]_0^b = \frac{b^{d+1}}{d+1}$$

La théorie de l'intégration définit

$\int_a^b f(x)\,dx$ comme étant la limite de

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = S_n(f,a,b)$$

où f est une fonction continue. L'expression $S_n(f,a,b)$ s'appelle somme de Riemann.

Le fait remarquable est le suivant.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si $a \in I$ alors la fonction qui à $x \in I$ associe $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une fonction dérivable dont la dérivée est f.

__Application.__ Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$ un polynôme. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Expression de $\int_\alpha^\beta P(x)\,dx$.

$$\int_\alpha^\beta P(x)\,dx = Q(\beta) - Q(\alpha)$$ où Q est un polynôme dont la dérivée est P.

Prendre $$Q(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_d \frac{x^{d+1}}{d+1}.$$

On utilise le fait que la dérivée de $x \mapsto x^k$ est $x \mapsto k x^{k-1}$ et donc une primitive de $x \mapsto x^\ell$ est $x \mapsto \frac{1}{\ell+1} x^{\ell+1}$

__Intégration par parties.__

Si u et v sont deux fonctions dérivables alors

$(uv)' = u'v + uv'$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned} u(b)v(b) - u(a)v(a) &= uv(b) - uv(a) \\ &= \int_a^b (uv)'(x)\,dx \\ &= \int_a^b (u'v + uv')(x)\,dx \\ &= \int_a^b \left(u'v(x) + uv'(x)\right) dx \\ &= \underline{\int_a^b u'v(x)\,dx} + \int_a^b uv'(x)\,dx \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_a^b u'v(x)\,dx &= [u(b)v(b) - u(a)v(a)] - \int_a^b uv'(x)\,dx \\ &= [uv]_a^b - \int_a^b uv'(x)\,dx \end{aligned}$$

Ce qu'on obtient est la formule d'<u>intégration par</u> <u>partie</u> : si u, v sont des fonctions dérivable alors

$$\boxed{\int_a^b u'v(x)\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'(x)\,dx.}$$

<u>Exemple</u> Calculons $I = \int_a^b x\exp(x)\,dx$

On pose $v(x) = x$ $u(x) = \exp(x)$. On a donc

$v'(x) = 1$ et $u'(x) = \exp(x)$

Donc d'après la formule d'intégration par

Partie

$$I = \int_a^b \overset{v}{x}\,\overset{u'}{\exp(x)}\,dx$$

$$= \left[\overset{v}{x}\,\overset{u}{\exp(x)}\right]_a^b - \int_a^b \overset{v'}{1}\cdot\overset{u}{\exp(x)}\,dx$$

$$= b\exp(b) - a\exp(a) - \left[\exp(x)\right]_a^b$$

$$= b\exp(b) - a\exp(a) - \left[\exp(b) - \exp(a)\right]$$

$$= (b-1)\exp(b) - (a-1)\exp(a)$$

Ceci établit qu'une primitive de $x\exp(x)$ $(x-1)\exp(x)$.