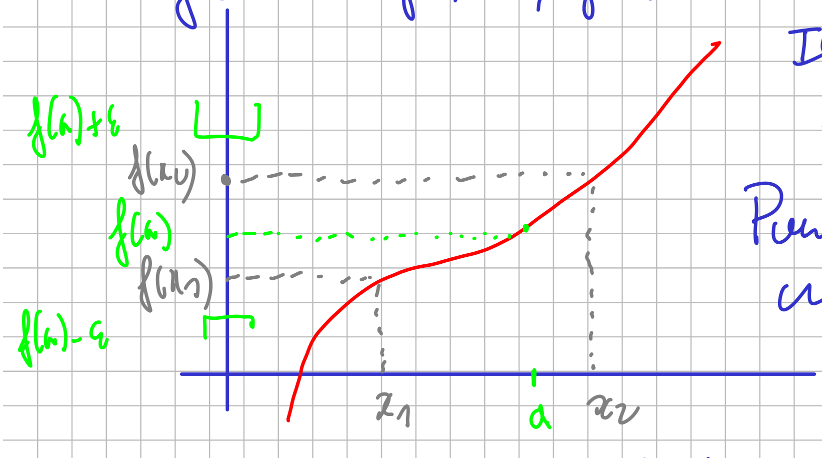
Pass option Maths
CMP3
15/03/2023

Théorème (monotonie et continuité) Soit $f : I \to J$ une fonction définie entre deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On suppose f strictement croissante ou strictement décroissante. Alors f est continue si et seulement si $f(I)$ est un intervalle ouvert.

Preuve. . D'après le théorème des valeurs intermédiaires si f est continue $f(I)$ est un intervalle (c'est indépendant de la monotonie de f).

Réciproquement on suppose que $f(I) = K$ un intervalle on traite le cas où f est strictement croissante.

Soit $a \in I$ Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f(I)$ est un intervalle $f(I) \cap]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$ est aussi un intervalle



Il existe $x_1 < a < x_2$ tel que $f(x_1), f(x_2) \in]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$

Puisque f est strictement croissante et que $x_1 < a < x_2$ on a $f(x_1) < f(a) < f(x_2)$

De plus $f(a)-\varepsilon < f(x_1) < f(a) < f(x_2) < f(a)+\varepsilon$

On pose $\eta = \min(x_2 - a, a - x_1)$

si $x \in I$ et $|x-a| < \eta$ alors

$x_1 \leq a-\eta < x < a+\eta \leq x_2$

Par conséquent $f(a)-\varepsilon < f(x_1) < f(x) < f(x_2) < f(a)+\varepsilon$

finalement si $|x-a| < \eta$ alors $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$

En conclusion si $a \in I$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x-a| < \eta$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Ceci signifie bien que f est continue en a pour tout $a \in I$.

<u>Corollaire</u> Soit $f : I \longrightarrow J$ où I, J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Si $f(I) = J$ et f strictement monotone alors f est une bijection continue et sa réciproque aussi.

<u>Définition</u> • Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^k si f est continue et, si $k \geq 1$, f est dérivable et sa dérivée f' est de classe C^{k-1}.

• On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout k.

<u>Observation</u>. Si une fonction est de classe C^k avec $k > 0$ alors pour tout $a \in I$ on peut calculer

$$f(a),\ f'(a),\ (f')'(a),\ \ldots\ldots\ldots,\ \underbrace{(((f')')\cdots)'}_{\text{on a dérivé } k \text{ fois}}(a)$$

<u>Notations</u>
$$f(a) = f^{(0)}(a), \quad f'(a) = f^{(1)}(a),$$
$$(f')'(a) = f''(a) = f^{(2)}(a)$$
$$((f')')'(a) = f'''(a) = f^{(3)}(a)$$
$$\underbrace{(((f')'), \ldots\ldots)'}_{\text{on a dérivé } k \text{ fois.}}(a) = f^{(k)}(a)$$

<u>Exemples</u>. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \longmapsto x^2$

$f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2 \quad f'''(x) = 0 \quad f^{(k)}(x) = 0$

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto x^n$

$f'(x) = n x^{n-1} \quad f''(x) = n(n-1) x^{n-2} \quad f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k}$

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \exp(x)$

$f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(k)}(x) = \exp(x)$

- $f :]0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto \ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

- $f :]0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto x^\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

$f'(x) = \lambda x^{\lambda-1} \quad f''(x) = \lambda(\lambda-1) x^{\lambda-2}$

$f^{(k)}(x) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1) x^{\lambda-k}$

⚠ • Si $\lambda \notin \mathbb{N}$ $\quad f^{(k)}(x) \neq 0$

• Si $\lambda \in \mathbb{N}$ $\quad f^{(k)}(x) = 0$ si $k > \lambda$.

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x) \quad f''(x) = -\cos(x) \quad f'''(x) = \sin(x) \quad f^{(4)}(x) = \cos(x)$

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \sin(x)$

$f'(x) = \cos(x) \quad f''(x) = -\sin(x) \quad f'''(x) = -\cos(x) \quad f^{(4)}(x) = \sin(x)$

$$\boxed{\cos'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

<u>Des contre exemples :</u> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto |x|$

Cette fonction est continue donc f est de classe C^0 mais elle n'est pas de classe C^1 car elle n'est pas dérivable à l'origine.

Montrons qu'elle n'est pas dérivable en 0.

- Soit $x > 0$ $\quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = \dfrac{x-0}{x-0} = \dfrac{x}{x} = 1$

  donc si f est dérivable en 0 on aurait $f'(0) = 1$

- Soit $x < 0$ $\quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = \dfrac{-x-0}{x-0} = \dfrac{-x}{x} = -1$

  donc si f est dérivable en 0 on aurait $f'(0) = -1$

  Puisque $-1 \neq 1$, $f'(0)$ n'est pas défini.

- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(x) = x|x|$

  Cette fonction est C^1 mais pas C^2.

  - Montrons que f' existe.
    - Soit $a > 0$ On a $f(a) = a^2$ et si $x \in]0, +\infty[\setminus \{a\}$ $\quad f(x) = x^2$

      Donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{x^2-a^2}{x-a} = x+a$

      et donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} x+a = 2a = f'(a)$

    - Soit $a < 0$ On a $f(a) = -a^2$ et si $x \in]-\infty, 0[\setminus \{a\}$ $\quad f(x) = -x^2$

      Donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{(-x^2)-(-a^2)}{x-a} = \dfrac{-(x^2-a^2)}{x-a} = -(x+a)$

      et donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} -(x+a) = -2a = f'(a)$

- En 0 on a si $x \in \mathbb{R}^*$ $|f(x)| = x^2$. Puisque $f(0) = 0$

On a $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| = \left|\dfrac{x^2}{x}\right| = |x|$

et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} |x| = 0$

Par conséquent $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 = f'(0)$

Finalement $f'(a) = \begin{cases} 2a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -2a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

et donc $f'(a) = 2|a|$

Puisque la fonction $|\ |$ est C^0 mais pas C^1 la fonction f qui est dérivable de dérivée $2|\ |$ est C^1 mais pas C^2.

Primitives

Définition Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f si F est dérivable et $F' = f$ (⚠ I intervalle)

Exemples
- Une primitive de $f : x \longmapsto 0$ est $F : x \longmapsto \mu$ avec μ cte
- Une primitive de $f : x \longmapsto \lambda$ est est $F : x \longmapsto \lambda x + \mu$

- une primitive de $f : x \mapsto x^\alpha$ est $F : x \mapsto \frac{1}{(\alpha+1)} x^{\alpha+1}$ sauf si $\alpha = -1$

  et une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est $F : x \mapsto \ln(x)$. sur $]0, +\infty[$

- Une primitive de $f : x \mapsto \cos x$ est $F : x \mapsto \sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$
- Une primitive de $f : x \mapsto \sin x$ est $F : x \mapsto -\cos(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$
- une primitive de $f : x \mapsto \exp(x)$ est $F : x \mapsto \exp(x)$.
- une primitive de $f : x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est $F : x \mapsto -\ln|\cos(x)|$

Pour l'établir on utilise le fait que $(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$. On donne avec $u = \ln$ et $v = \cos$; sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a $F(x) = -\ln \cos(x)$

donc $F'(x) = -\ln' \circ \cos(x) \times \cos'(x)$

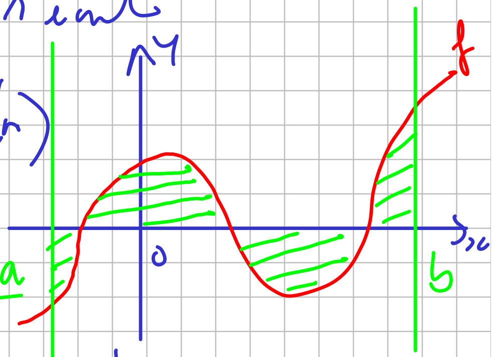
$$= -\frac{1}{\cos(x)} \times (-\sin(x)) = +\tan(x)$$

Théorème (de Newton et de ses successeurs)

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue (I intervalle). Alors il existe $F : I \to \mathbb{R}$ primitive de f : $F' = f$.
> De plus si G est une autre primitive de f alors $G = F + \mu$ où μ est une constante.

<u>Intégration intervalle</u>. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I. Alors si $[a,b] \subset I$ l'aire délimitée par le graphe de f, l'axe Ox, les droites $x=a$ et $x=b$ est égale à $F(b)-F(a)$ où $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f. Ceci s'écrit

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$



L'aire étant l'interprétation, en termes mathématiques c'est l'intégrale entre a et b de f

Pour comprendre l'égalité entre intégrale (aire) et primitive on doit comprendre la notion d'aire.

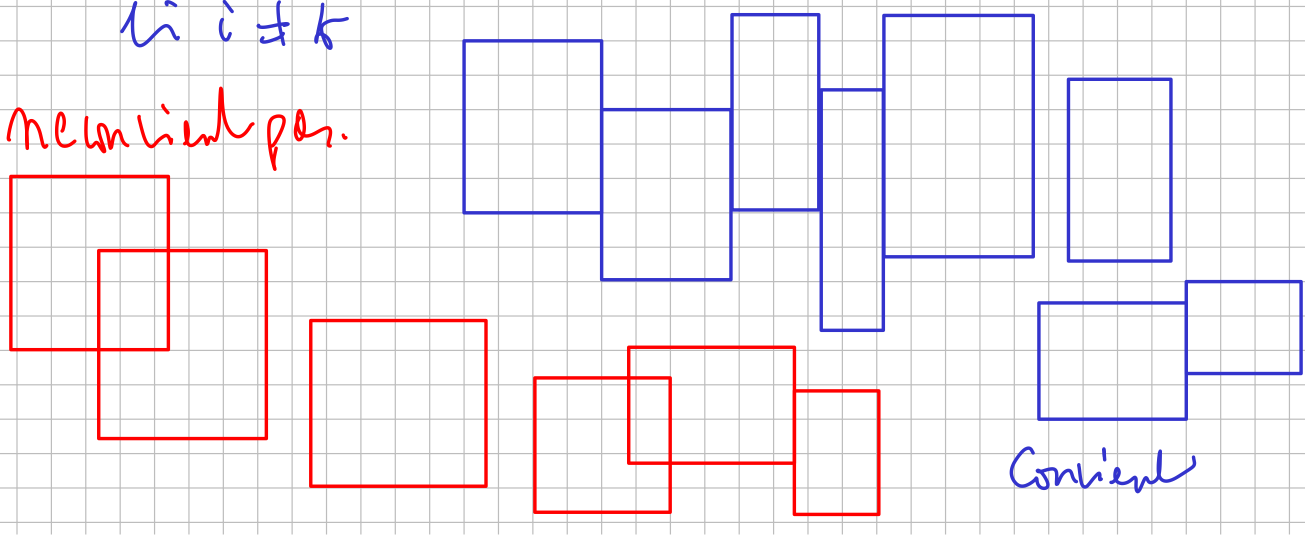
On pose Aire $([a,b]\times[c,d]) = (b-a)(d-c)$

Aire $(R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n) = \sum_{i=1}^{n} \text{Aire}(R_i)$ si les R_i sont des rectangles tels que

$$\left(]a_i,b_i[\times]c_i,d_i[\right) \cap \left(]a_k,b_k[\times]c_k,d_k[\right) = \emptyset$$

si $i \neq k$

ne convient pas.



Convient

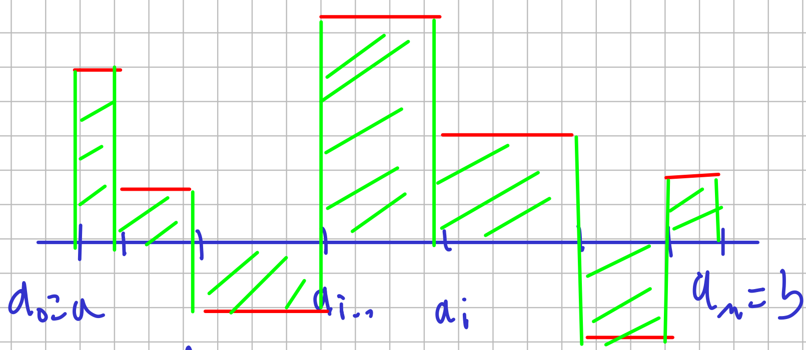
Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier

il existe $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ avec $a_0 = a$ $a_n = b$

et $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que si $x \in]a_{i-1}, a_i[$

alors $f(x) = \mu_i$



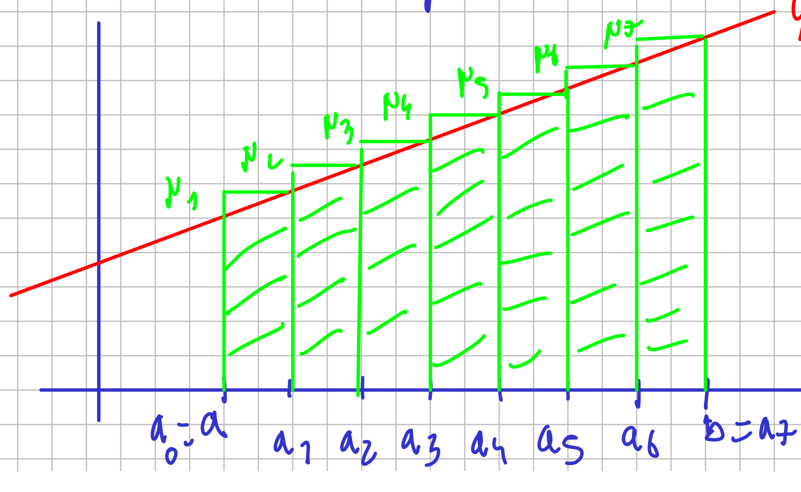
On définit l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ de f entre a et b

Par $$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\,\mu_i$$

Exemple $\quad f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad n \in \mathbb{N}^*$

$$a_i = a + i\,\frac{(b-a)}{n}$$

$$\mu_i = \lambda + \mu\, a_i$$



dessin avec

$n = 7$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \mu_i$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \lambda + \mu \left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right) \left[\sum_{i=1}^{n} (\lambda + \mu a) + \left(\frac{b-a}{n}\right) \mu \sum_{i=1}^{n} i \right]$$

$$= (b-a)(\lambda + \mu a) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \mu \, \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (b-a)(\lambda + \mu a) + \frac{(b-a)^2}{2} \mu \, \frac{n+1}{n}$$

$$\Big\downarrow \, n \to +\infty$$

$$= (b-a)(\lambda + \mu a) + \frac{(b-a)^2}{2} \mu$$

= Aire délimitée par la droite $y = \lambda x + \mu$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$

$$= \int_a^b (\lambda + \mu x)\,dx = \left[\lambda x + \mu \frac{x^2}{2} \right]_a^b$$

$$= \lambda (b-a) + \frac{\mu}{2} (b^2 - a^2)$$