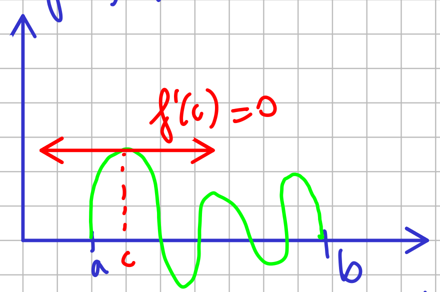
Pass option Maths
CMP3
08/03/2023

Preuve du théorème de Rolle

Il s'agit de prouver l'énoncé suivant.
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que la restriction $f_{]a,b[}$ de f à l'intervalle ouvert $]a,b[$ est dérivable et que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$



1er cas. La fonction f est constante. Alors si $x \in [a,b]$ $f(a) = f(x) = f(b)$ et donc quel que soit $c \in]a,b[$ si $x \in [a,b]$ et $x \neq c$ on a
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$$ et donc à la limite $f'(c) = 0$
$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} 0 = 0$$

Donc $f'(c) = 0$ quel que soit $c \in]a,b[$

2e cas. La fonction f n'est pas constante

Dans ce cas il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$.

1er sous cas : il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) > f(a) = f(b)$
Puisque f est continue sur $[a,b]$, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $f([a,b]) = [m, M]$. On a $f(x_0) \leq M$ donc $f(a) = f(b) < f(x_0) \leq M$. De plus il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = M$ (car $f([a,b]) = [m,M]$)
Soit $x' \in [a,c[$ et $x'' \in]c,b]$
On a $f(c) \geq f(x')$ et $f(c) \geq f(x'')$

donc $0 \geq f(x') - f(c)$ (*) et $0 \geq f(x'') - f(c)$ (**)

or $x' - c < 0$ car $x' < c$ et $x'' - c > 0$ car $x'' > c$

Ainsi en divisant (*) par $x' - c$ il vient

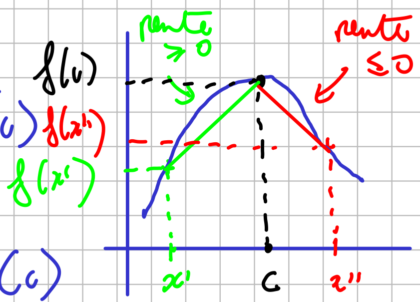
$$0 \leq \frac{f(x') - f(c)}{x' - c}$$ car $x' - c < 0$ (changement de l'inégalité)

et en divisant (**) par $x'' - c$ il vient

$$0 \geq \frac{f(x'') - f(c)}{x'' - c}$$ car $x'' - c > 0$ (conservation de l'inégalité)

Par passage à la limite on a

$$0 \leq \lim_{\substack{x' \to c \\ x' < c}} \frac{f(x') - f(c)}{x' - c} = f'(c)$$



et $$0 \geq \lim_{\substack{x'' \to c \\ x'' > c}} \frac{f(x'') - f(c)}{x'' - c} = f'(c)$$

Ainsi $0 \leq f'(c) \leq 0$ et donc $f'(c) = 0$

2e sous cas (négation de l'hypothèse du 1er sous cas) Pour tout $x \in]a,b[$ $f(x) \leq f(a) = f(b)$. On considère $g = -f$.

Alors on se ramène au 1er sous cas. En effet g n'est pas constante puisque f n'est pas constamment égale à $f(a) = f(b)$. De plus $g(x) \geq f(a) = f(b)$ vu que

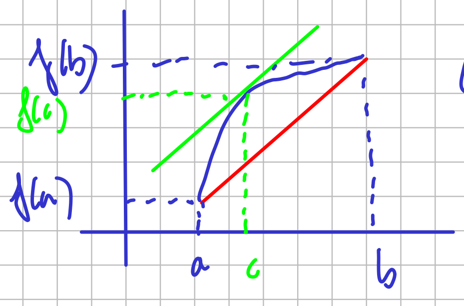
$f(x) = -g(x) \leq f(a) = f(b)$ si $x \in]a,b[$.

Il existe donc $x_0 \in]a,b[$ tel que $g(x_0) > g(a) = g(b)$

Puisque f est continue, g l'est aussi et puisque $f_{]a,b[}$ est dérivable, $g_{]a,b[}$ l'est aussi.

On peut donc appliquer les conclusions du 1er sous cas à g :
il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $g'(x_0) = 0$
Or $g'(x_0) = -f'(x_0)$. Donc $f'(x_0) = 0$. □

Preuve du théorème des accroissements finis. Il s'agit de prouver que si $f : [a,b] \to$ continue et $f_{]a,b[}$ dérivable alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



La tangente au graphe de f en $(c, f(c))$ a même pente que la corde de ce graphe entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ (les deux droites sont parallèles)

On considère $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a) \right)$$

La fonction g est continue sur $[a,b]$ et $g_{|]a,b[}$ est dérivable et

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(a-a) \right) \\ &= f(a) - f(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(b-a) \right) \\ &= f(b) - \left(f(a) + (f(b) - f(a)) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

si $x \in]a,b[$ $\quad g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Puisque $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, $g_{|]a,b[}$ dérivable et $g(a) = g(b) = 0$, d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$

Donc $0 = g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Finalement on a trouvé $c \in]a,b[$ tel que

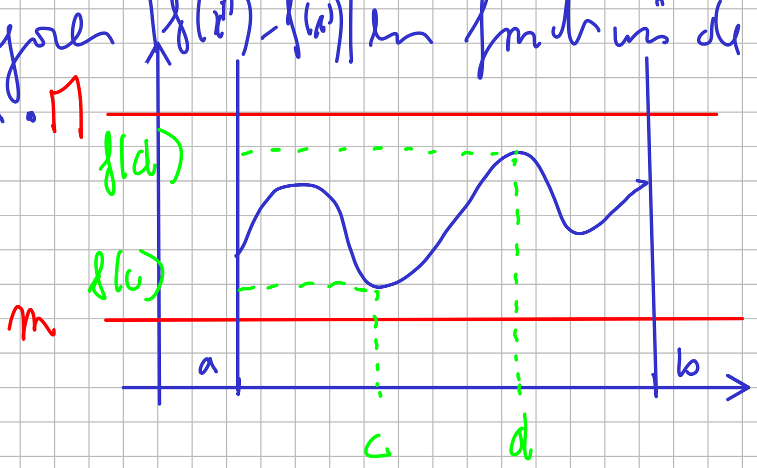
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f(c)$$

$\square$

Exercice Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose $f_{]a,b[}$ dérivable. Soit $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [a,b]$ $m \leq f(x) \leq M$.
On suppose aussi qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que pour tout $x \in]a,b[$ $|f'(x)| \leq \lambda$.

Si $x', x'' \in [a,b]$ Majorer $|f(x') - f(x'')|$ en fonction de $(b-a)$ et de λ. M

(m et M ne sont pas utiles)



Puisque f est continue sur $[a,b]$. Il existe $c, d \in [a,b]$ tel que $f([a,b]) = [f(c), f(d)]$

D'après le théorème des accroissements finis. Il existe x_0 strictement compris entre c et d tel que $f'(x_0) = \dfrac{f(d) - f(c)}{d - c}$

On a donc $|f'(x_0)|\,|d-c| = f(d) - f(c)$

Or $|f'(x_0)| \leq \lambda$ et, puisque $d, c \in [a,b]$ $|d-c| \leq (b-a)$.

Par conséquent $\lambda.(b-a) \geq |f'(x_0)|\,|d-c| = f(d) - f(c)$

Soit $x', x'' \in [a,b]$ on a

$f(x'), f(x'') \in [f(c), f(d)]$ et donc

$|f(x'') - f(x')| \leq f(d) - f(c) \leq \lambda(b-a)$

Conclusion $\boxed{\text{si } x', x'' \in [a,b] \quad |f(x'') - f(x')| \leq \lambda(b-a)}$

<u>Application</u> Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que s'il existe $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ tels que $f(x_i) = 0$ alors il existe $y_1, \dots, y_n$ tels que $f'(y_i) = 0$.

<u>Preuve</u> <u>Si $n=1$</u> On est dans le cadre du théorème de Rolle : la fonction $f_{[x_0,x_1]}$ est continue, $f_{]x_0,x_1[}$ est dérivable et $f(x_0) = f(x_1)$. D'après le théorème de Rolle il existe $y_1 \in]x_0, x_1[$ tel que $f'(y_1) = 0$.

Maintenant que le résultat est prouvé au rang 1 intéressons nous à l'hérédité. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ fixé un entier naturel $\neq 0$. On suppose le résultat prouvé jusqu'au rang n.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et dérivable. On suppose qu'il existe $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$ tels que $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = f(x_{n+1})$.

D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à f et $x_0, x_1, \dots, x_n$. Il existe donc $y_1, \dots, y_n$ tels que $f'(y_1) = \dots = f'(y_n) = 0$

Sur $[x_n, x_{n+1}]$ f vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc y_{n+1} tel que $f'(y_{n+1}) = 0$.

⚠ Il y a un souci car nous ne sommes pas sûrs que y_{n+1} est différent de $y_1, \dots, y_n$.
Il faut corriger la preuve en formulant exactement l'hypothèse de récurrence de la façon suivante

(H_n) Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue dérivable et $x_0 < \dots < x_n$ sont tels que que $f(x_0) = \dots = f(x_n)$ alors il existe $y_1 < \dots < y_n$ avec $y_i \in]x_{i-1}, x_i[$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ vérifiant $f'(y_1) = \dots = f'(y_n) = 0$

C'est ce qui manquait.

Initialisation Par Rolle appliqué à $f_{[x_0, x_1]}$ on trouve $y_1 \in]x_0, x_1[$ tel que $f'(y_1) = 0$.
Donc (H_1) est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (H_n) est vraie.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue dérivable avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$ tels que $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) = f(x_{n+1})$.

Puisque (H_n) est vraie, Il existe $y_1 \in]x_0, x_1[, \dots, y_n \in]x_{n-1}, x_n[$ tels que $f'(y_1) = \dots = f'(y_n) = 0$.

D'après (H_1) appliquée à f restreinte à $[x_n, x_{n+1}]$ il existe $y_{n+1} \in]x_n, x_{n+1}[$ telle que $f'(y_{n+1}) = 0$.

On a $x_0 < y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \dots < x_n < y_{n+1} < x_{n+1}$

Les $y_1, \dots, y_{n+1}$ sont bien tous différents, ils vérifient $y_i \in]x_{i-1}, x_i[$ et $f'(y_i) = 0$.

L'hérédité est prouvée.

Applications à l'étude des variations des fonctions.

Prop Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable (I intervalle ouvert). On suppose $f' > 0$.
Alors f est strictement croissante.

Preuve Soit $a < b \in I$ on veut montrer que $f(a) < f(b)$.

On applique le théorème des accroissements finis à la restriction de f à $[a, b]$.
Il affirme l'existence de $c \in]a, b[$ telle que
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
Donc $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

On a par hypothèse, $f'(c) > 0$

De plus $a < b$ donc $b - a > 0$.

Par conséquent $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) > 0$

et $f(a) < f(b)$.

$\square$.