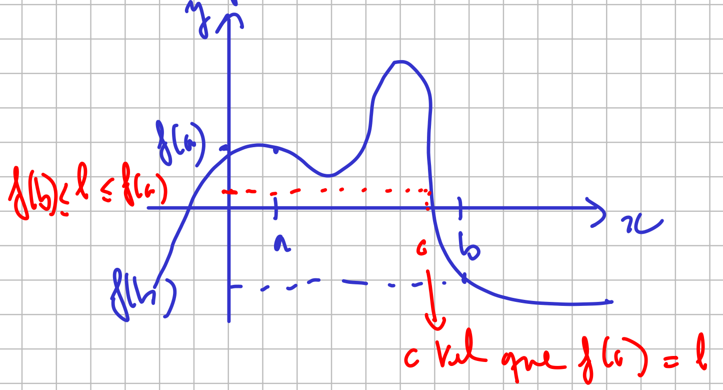
Pass option Maths
CMP3
01/03/2023

Preuves de résultats fondamentaux de l'étude des fonctions.

Théorème des valeurs intermédiaires. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \leq b$ deux réels de I. Si l est un réel entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = l$



Preuve. Soit $X = \{x \in [a,b] \,/\, f(x) - l \text{ du même signe que } f(a) - l\}$.
L'ensemble X est non vide car $a \in X$, il est inclus dans $[a,b]$ et donc il est borné (majoré par b et minoré par a).
Il possède donc une borne supérieure c. On va montrer que $f(c) = l$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue, il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x - c| < \eta$ alors $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Puisque c est la borne supérieure de X et que $\eta > 0$, il existe $x \in X$ avec $c - \eta < x \leq c$. Comme $x \in X$ $f(x) \leq l$. (1)

Comme $|x - c| < \eta$ on a $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. (2)

De (1) et (2) on déduit que $\boxed{f(c) \leq l + \varepsilon}$ (I)

[(1) donne $f(x) \leq l$ (2) donne $f(x) - \varepsilon < f(c) < f(x) + \varepsilon$
et donc $f(c) < f(x) + \varepsilon \leq l + \varepsilon$]

Puisque c est la borne supérieure de X et que $\eta > 0$, tout réel strictement plus que c n'est pas dans X en particulier si $x \in]c, c+\eta[$ $x \notin X$ et donc $f(x) > l$ $(1)'$ et comme $|x-c| < \eta$ on a $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ $(2)'$

De $(1')$ et $(2')$ on déduit que $\boxed{l - \varepsilon \leq f(c)}$ (II)

[$(1')$ donne $l < f(x)$ $(2')$ donne $f(x) - \varepsilon < f(c) < f(x) + \varepsilon$

et donc $l - \varepsilon < f(x) - \varepsilon < f(c)$]

Finalement (I) et (II) signifient que

$\forall \varepsilon > 0 \quad l - \varepsilon \leq f(c) \leq l + \varepsilon$

c'est à dire

$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(c) - l| \leq \varepsilon.$

Ceci entraîne que $|f(c) - l| = 0$ et donc $f(c) = l$.

[en effet si $\alpha \geq 0$ vérifie "$\forall \varepsilon > 0, \alpha \leq \varepsilon$" alors $\alpha = 0$.
Si ceci était faux alors $\alpha > 0$. On pourrait prendre pour $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ car α est supposé strictement positif.
On aurait donc $\alpha < \frac{\alpha}{2}$ et donc
$\frac{\alpha}{2} = \alpha - \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 0$ et donc $\alpha = 2\frac{\alpha}{2} < 2 \cdot 0 = 0$
Ceci n'est pas possible donc $\alpha = 0$]

<u>Théorème</u> Soit I intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $a \leq b$ des réels de I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Il existe alors $m \leq M$ deux réels tels que $f([a,b]) = [m, M]$

<u>Preuve</u> <u>Étape 1</u> Montrons qu'il existe $d \in [a,b]$ tel que si $x \in [a,b]$ $f(x) \leq f(d)$

Soit $Y = \{ y = f(x) \mid x \in [a,b] \} = f([a,b])$

On pose $M = \operatorname{Sup} Y$

Soit Y est un non ensemble majoré de $\mathbb{R}$ et M est sa borne supérieure, soit il ne l'est pas et

$M = +\infty$ Montrons que M ne peut être égal à $+\infty$.
On raisonne par l'absurde et on suppose $M = +\infty$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ - Puisque $\operatorname{Sup} Y = +\infty$ il existe
$y_n \in Y$ tel que $y_n \geq n$. Il existe donc
$x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) = y_n \geq n$.
La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite est une suite à valeurs dans $[a, b]$ donc bornée.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe $d \in [a, b]$ $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la limite d.
Puisque f est continue en d si $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x - d| < \eta$
alors $|f(x) - f(d)| < \varepsilon$.
donc si $x \in I$ et $|x - d| < \eta$ alors $f(x) < f(d) + \varepsilon$

Puisque $(x_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers d et que $\eta > 0$
il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq k_0$ alors
$|x_{\varphi(k)} - d| < \eta$

Par conséquent, si $k \geq k_0$

$$y_{\varphi(k)} = f(x_{\varphi(k)}) < f(d) + \varepsilon$$

Or $y_{\varphi(k)} \geq \varphi(k) \geq k$

Donc si on choisit $k \geq k_0$ et $k > f(d) + \varepsilon$

on obtient $y_{\varphi(k)} < f(d) + \varepsilon < k \leq y_{\varphi(k)}$

et donc $y_{\varphi(k)} < y_{\varphi(k)}$. Ceci n'est pas possible. Ceci prouve par réduction à l'absurde que l'hypothèse $M = \operatorname{Sup} Y = \operatorname{Sup} f([a, b]) = +\infty$

est fermé. Ainsi $M = \sup Y = \sup f([a,b]) < +\infty$.

Maintenant on sait que
$Y = \{ y = f(x) \mid x \in [a,b] \}$ est borné et $M = \sup Y$, sa borne supérieure est un réel.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque M est la borne supérieure de Y il existe $y \in Y$ tel que $M - \varepsilon < y \leq M$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique ceci avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ il existe donc $y_n \in Y$ tel que $M - \frac{1}{n+1} < y_n \leq M$.
Puisque $y_n \in f([a,b]) = Y$ il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) = y_n$.

On vient de construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in [a,b]$,
- $M - \frac{1}{n+1} < f(x_n) \leq M$

(où $M = \sup Y = \sup f([a,b])$).

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée, à valeurs dans $[a,b]$. D'après le théorème de Bolzano Weierstrass il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $\alpha \in [a,b]$ telles que $(x_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente et converge vers la limite α.

Montrons que $f(\alpha) = M$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en α, il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in [a,b]$ et $|x - \alpha| < \eta$ alors $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$.

Puisque $(x_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers α il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq k_0$ $|x_{\varphi(k)} - \alpha| < \eta$ et donc
$|f(x_{\varphi(k)}) - f(\alpha)| < \varepsilon$ c'est-à-dire $|y_{\varphi(k)} - f(\alpha)| < \varepsilon$

Prenons k tel que $\frac{1}{k+1} < \varepsilon$ et $k \geq k_0$

Par conséquent on a $\varphi(k) \geq k$ et donc

$M-\varepsilon < M - \frac{1}{k+1} \leq M - \frac{1}{\varphi(k)+1} < y_{\varphi(k)} \leq M$ et donc $|y_{\varphi(k)} - M| < \varepsilon$

et $|y_{\varphi(k)} - f(d)| < \varepsilon$

On en déduit que $|M - f(d)| < 2\varepsilon$.

en effet $|M - f(d)| = |M - y_{\varphi(k)} + y_{\varphi(k)} - f(d)|$

$$\leq |M - y_{\varphi(k)}| + |y_{\varphi(k)} - f(d)|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon$$

$$< 2\varepsilon.$$

On vient de montrer que si $\varepsilon > 0$ $|M - f(d)| < 2\varepsilon$.

Ceci entraîne que $|M - f(d)| = 0$ et donc $M = f(d)$.

Ceci prouve qu'il existe $d \in [a,b]$ tel que

$f(d) = M = \sup\{y = f(x) \mid x \in [a,b]\}$

et donc si $x \in [a,b]$ $f(x) \leq f(d)$.

On montre de la même façon qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que si $x \in [a,b]$ $f(c) \leq f(x)$

Ainsi $f([a,b]) \subset [f(c), f(d)]$.

Montrons que $[f(c), f(d)] \subset f([a,b])$.

On a $c, d \in [a,b]$ et soit l entre $f(c)$ et $f(d)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué au segment $[c,d]$ si $c \leq d$ ou au segment $[d,c]$ si $d \leq c$, il existe e entre c et d tel que $f(e) = l$. Comme e est entre c et d et que $c, d \in [a,b]$ on a que $e \in [a,b]$. Ainsi tout $l \in [f(c), f(d)]$

possède un antécédent $e \in [a,b]$ et donc
$[f(c), f(d)] \subset f([a,b])$

On a montré par double inclusion que
$$f([a,b]) = [f(c), f(d)].$$
L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Applications

Exercice 1 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.
On suppose que $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = 0$.

Solution Puisque f est continue sur l'intervalle $[0,1]$ et que $0, 1 \in [0,1]$ elle prend toutes les valeurs comprises entre $f(0)$ qui est négatif et $f(1)$ qui est positif.
Puisque $f(0) < 0 < f(1)$ il existe donc $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = 0$.

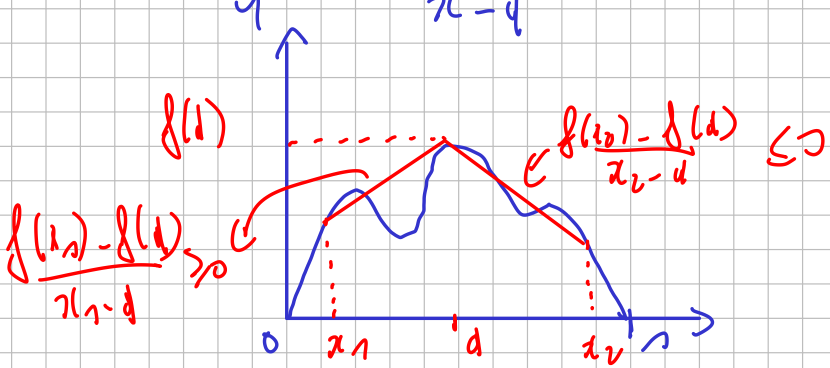
Exercice 2 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue.
On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que si $x \neq 0$ $f(x) > 0$.
Montrer qu'il existe $d \in]0,1[$ tel que
- si $x \in [0,d[$ alors $\dfrac{f(x) - f(d)}{x-d} \geq 0$

et
- si $x \in]d,1]$ alors $\dfrac{f(x) - f(d)}{x-d} \leq 0$.

Solution Puisque f est continue sur $[0,1]$ qui est un segment il existe $c, d \in [0,1]$ tels que $f([0,1]) = [f(c), f(d)]$.
Puisque $f(0) = f(1) = 0$ et que $f(x) > x$ si $x \in]0,1[$
On a $c = 0$ ou 1 $f(c) = 0$, $d \in]0,1[$ et $f(d) > 0$.

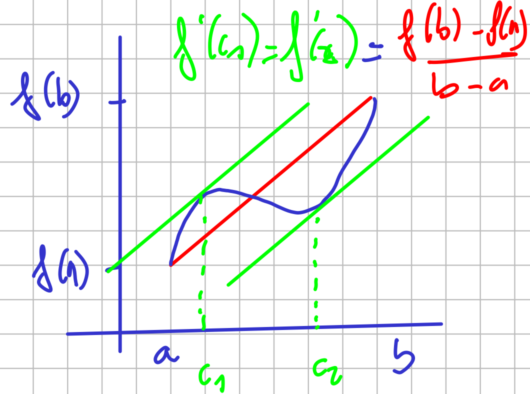
On a donc si $x \in [0,1]$ $f(x) \leq f(d)$.

- 1er cas $x \in [0,d[$. Alors $x<d$ et comme $f(x) \leq f(d)$ on a $f(x)-f(d) \leq 0$ et $x-d<0$ et donc $$\frac{f(x)-f(d)}{x-d} \geq 0$$
- 2e cas $x \in]d,1]$. Alors $x>d$ et comme $f(x) \leq f(d)$ on a $f(x)-f(d) \leq 0$ et $x-d>0$ et $$\frac{f(x)-f(d)}{x-d} \leq 0$$



Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

Soit $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est continue et on suppose que si $x \in]a,b[$ le nombre dérivé $f'(x)$ est défini : $\forall x \in]a,b[\ \exists l \in \mathbb{R}$
$$\lim_{\substack{x' \to x \\ x' \neq x}} \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = l.$$
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



Interprétation physique. Si f représente la position d'un point sur une droite en fonction du temps le taux d'accroissement $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ représente la vitesse moyenne et $f'(x)$ représente la vitesse dite instantanée.

Le théorème dit que la vitesse moyenne est égale à la vitesse instantanée en un temps c bien choisi.