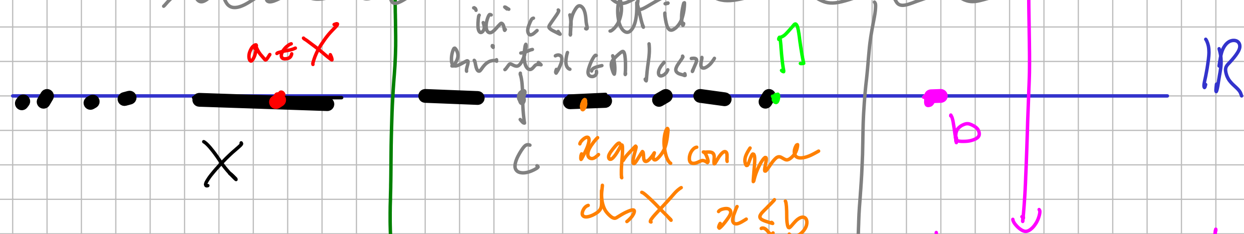
Pass option Maths
CMP3
15/02/2023

Quelques résultats sur les suites numériques.

Une propriété importante de $\mathbb{R}$, la propriété de la borne supérieure :

Soit $X \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré. Alors X admet une borne supérieure M. Autrement dit s'il existe $a \in X$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x de X $x \leq b$ alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que si $x \in X$ alors $x \leq M$ et pour tout $c \in \mathbb{R}$ tel que $c < M$ il existe $x \in X$ avec $c < x$.



$\boxed{\text{I}}$ M est un majorant de X

b est un majorant de X

$\boxed{\text{II}}$ Tout nombre réel plus petit strictement que M n'est pas un majorant de X

Les affirmations $\boxed{\text{I}}$ et $\boxed{\text{II}}$ ensemble signifient que M est le plus petit des majorants de X

Finalement la borne supérieure de X est le plus petit de ses majorants.

(!) Ça marche car on considère $X \subset \mathbb{R}$ majoré.

Ça ne marche pas pour $Y \subset \mathbb{Q}$ majoré.
Par exemple $Y = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \text{ et } q^2 < 2\}$.
Y admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, c'est $\sqrt{2}$, mais pas dans $\mathbb{Q}$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Application de cette propriété aux suites numériques.

Déf. Une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [où $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in \mathbb{R}$] est convergente de limite l où $l \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Ceci signifie que les valeurs u_n de la suite sont arbitrairement proches de l pourvu que n soit suffisamment grand.

Théorème. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. Soit $b \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq b$ [$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par b]. On suppose aussi que si $n, m \in \mathbb{N}$ et $n \leq m$ alors $u_n \leq u_m$ [$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante]. Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers l tel que $l \leq b$.

Preuve. Soit $X = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. L'ensemble X est non vide, il contient u_0 par exemple. Il est majoré par b. En effet si $x \in X$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = u_n$ et on a donc
$x = u_n \leq b$.
Puisque $X \subset \mathbb{R}$ est non vide et majoré il possède une borne supérieure qu'on a notée l; le réel l vérifie :

- c'est un majorant de X et donc si $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq l$.
- c'est le plus petit des majorants de X et donc si $c \in \mathbb{R}$ vérifie $c < l$, il existe $x \in X$ tel que $c < x$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $c < x = u_n$.

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers l.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $c = l - \varepsilon$. On a $c < l$.
Puisque l est le plus petit des majorants de $X = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ il existe $x \in X$ tel que $c < x$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $x = u_N$ et donc $c < u_N$.
Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et puisque l est un majorant de X si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $N \leq n$ on a

(*) $l - \varepsilon = c < u_N \leq u_n \leq l$

l plus petit des majorants donc $l - \varepsilon < l$ n'est pas un majorant

croissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

l majorant de $X = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(*) implique que $0 \leq l - u_n < l - c = \varepsilon$ si $n \geq N$.

Conclusion $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers l.

Déf Suite extraite ou sous-suite.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Une suite extraite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante [si $n<m$ alors $\varphi(n)<\varphi(m)$] telle que si $k\in\mathbb{N}$ alors $v_k = u_{\varphi(k)}$.

Exemples

- $u_n = (-1)^n$ $\quad \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto 2k$

$$v_k = u_{\varphi(k)} = (-1)^{2k} = 1$$

$(v_k = u_{2k})$

- $u_n = (-1)^n$ $\quad \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto 2k+1$

$$v_k = u_{\varphi(k)} = (-1)^{2k+1} = -1$$

$(v_k = u_{2k+1})$

- $u_n = (-1)^n$ $\quad \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto 3k$

$$v_k = u_{\varphi(k)} = (-1)^{3k} = (-1)^{2k+k} = (-1)^{2k}\times(-1)^k = 1\times(-1)^k$$

$(v_k = u_{3k})$

$v_k = u_k$

- $u_n = (-1)^n$ $\quad \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto k!$

$$v_k = u_{\varphi(k)} = u_{k!} = (-1)^{k!}$$

$v_0 = (-1)^{0!} = (-1)^1 = -1 \quad v_1 = (-1)^{1!} = (-1)^1 = -1$

$$v_2 = (-1)^{2!} = (-1)^2 = 1$$

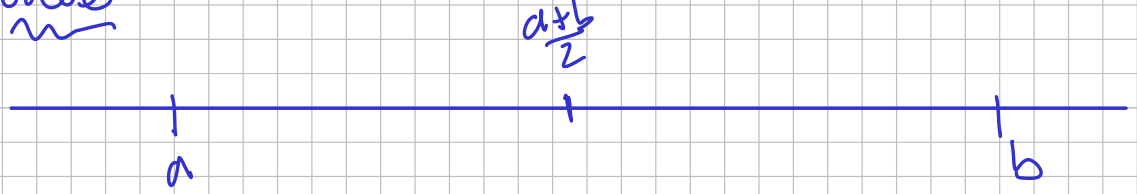
$$k \geq 3 \quad v_k = (-1)^{k!} = (-1)^{2\times 3\times \cdots \times k} = \left[(-1)^2\right]^{(3\times \cdots k)} = 1^{(3\times \cdots k)} = 1$$

Finalement $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (-1,-1,1,1,\dots\dots,1,\dots)$

Théorème de Bolzano-Weierstrass Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique à valeurs dans $[a,b]$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq u_n \leq b$. Alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite extraite (sous-suite) $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $v_k = u_{\varphi(k)}$ si $k \in \mathbb{N}$ est convergente.

Preuve (par dichotomie)

idée



$a_0 = a$ $\qquad$ $b_0 = b$

Alternative ?

$a_1 = a_0$ $\qquad$ $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ s'il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \in [a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$

si il n'y a qu'un nombre fini de n / $u_n \in [a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ $\qquad$ $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ $\qquad$ $b_1 = b_0$

On réitère cette alternative.

<u>hypothèse de récurrence</u> (H_k) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose avoir construit $a_0, a_1, \dots, a_k$ et $b_0, b_1, \dots, b_k$ telles que

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_k \leq b_k \leq \dots \leq b_1 \leq b_0$$

avec $b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0)$

et telles que $\{n \in \mathbb{N} \mid a_k \leq u_n \leq b_k\}$ est infini

On va construire a_{k+1} et b_{k+1} telles que (H_{k+1}) soit vraie.

<u>1er cas</u> $\{n \in \mathbb{N} \mid a_k \leq u_n \leq \frac{a_k+b_k}{2}\}$ est infini

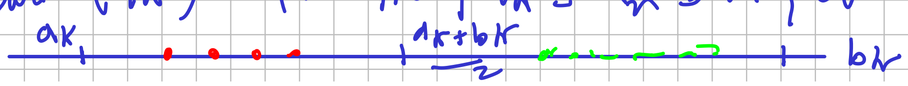
On pose $a_{k+1} = a_k$ $\quad b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$

On a bien (H_{k+1}) :

- $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$
- $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2} - a_k$
  $= \frac{1}{2}(b_k - a_k)$
  $= \frac{1}{2} \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0)$
  $= \frac{1}{2^{k+1}}(b_0 - a_0)$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid a_{k+1} \leq u_n \leq b_{k+1}\}$ est infini

<u>2e cas</u> $\{n \in \mathbb{N} \mid a_k \leq u_n \leq \frac{a_k+b_k}{2}\}$ est fini

Puisque par (H_k) $\{n \in \mathbb{N} \mid a_k \leq u_n \leq b_k\}$ est infini



On a donc $\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{a_k+b_k}{2} < u_n \leq b_k\}$ est infini

et donc également $\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{a_k+b_k}{2} \leq u_n \leq b_k\}$ infini.

On pose alors $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ $\quad b_{k+1} = b_k$

On a bien (H_{k+1})

- $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$
- $b_k - a_k = b_k - \frac{a_k+b_k}{2}$
$$= \frac{1}{2}(b_k - a_k)$$
$$= \frac{1}{2} \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0)$$
$$= \frac{1}{2^{k+1}}(b_0 - a_0)$$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid a_{k+1} \leq u_n \leq b_{k+1}\}$ est infini

Conclusion : • l'hypothèse (H_0) est vraie car la suite est à valeurs dans $[a, b] = [a_0, b_0]$ et donc $\{n \in \mathbb{N} \mid a_0 \leq u_n \leq b_0\} = \mathbb{N}$ est infini

• On a $(H_k) \Rightarrow (H_{k+1})$ [hérédité]

On vient donc de construire par récurrence deux suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que

(1) $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{k-1} \leq a_k \leq b_k \leq b_{k-1} \leq \dots \leq b_1 \leq b_0$ pour tout k

(2) $b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0)$ pour tout k

(3) $\{n \in \mathbb{N} \,/\, a_k \leq u_n \leq b_k\}$ est infini

D'après (1) . $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante majorée par b_0. Elle est donc convergente de limite ℓ_a

. de même $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée par a_0. Elle est donc convergente de limite ℓ_b

D'après (2) et (1) on peut montrer que

$$0 \leq \ell_b - \ell_a \leq b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0)$$

considérons $\varepsilon > 0$. Si on sait que $2^k \geq k$ on a si on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$ alors si $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq N$

on a $0 \leq \ell_b - \ell_a \leq \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0) \leq \frac{1}{k}(b_0 - a_0)$

$$\leq \frac{1}{N}(b_0 - a_0)$$

$$< \varepsilon \quad \text{car } N > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$ on a $0 \leq \ell_b - \ell_a < \varepsilon$.

Ceci signifie que $\ell_b = \ell_a$.

Les deux suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$

sont convergentes, de même limite $l_b = l_a$.

Il reste à construire $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_k = u_{\varphi(k)}$ est convergente de limite $l_l = l_a$.

On pose $\varphi(0) = 0$ et par récurrence, on considère $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(1), \dots, \varphi(k)$ construits avec $\varphi(0) < \dots < \varphi(k)$ et $\varphi(k) \in \{n \in \mathbb{N} \mid a_k \leq u_n \leq b_k\}$

Puisque $\{n \in \mathbb{N} \mid a_{k+1} \leq u_n \leq b_{k+1}\}$ est infini on pose $\varphi(k+1)$ comme étant le plus petit entier $m \in \mathbb{N}$ tel

$$\varphi(k) < m \quad \text{et tel que}$$
$$m \in \{n \in \mathbb{N} \mid a_{k+1} \leq u_n \leq b_{k+1}\}$$

Par construction on a

$$a_k \leq v_k = u_{\varphi(k)} \leq b_k$$
$$a_k \leq l \leq b_k \quad \text{avec } l = l_a = l_b$$

et donc $$|l - v_k| \leq b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0)$$

Par conséquent si $\varepsilon > 0$ et si on

Choisir N tel que $N > \dfrac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$

alors on a $|l - v_k| \leq \dfrac{1}{2^k}(b_0 - a_0)$
si $k \geq N$

$$\leq \frac{1}{k}(b_0 - a_0)$$

$$\leq \frac{1}{N}(b_0 - a_0)$$

$$< \varepsilon$$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall k \in \mathbb{N}$

$$k \geq N \Rightarrow |l - u_{\varphi(k)}| = |l - v_k| < \varepsilon$$

Ceci prouve que la suite extraite définie par $v_k = u_{\varphi(k)}$ est convergente de limite $l = l_a = l_b$

$\square$