Pass option Maths
CMP3
08/02/2023

Racine n^e d'un nombre complexe non nul. ($n \in \mathbb{N}^*$)

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ on recherche les $b \in \mathbb{C}$ tels que $b^n = a$.

1er cas $a=1$ On cherche $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^n = 1$
un tel nombre est appelé racine n^e de l'unité.

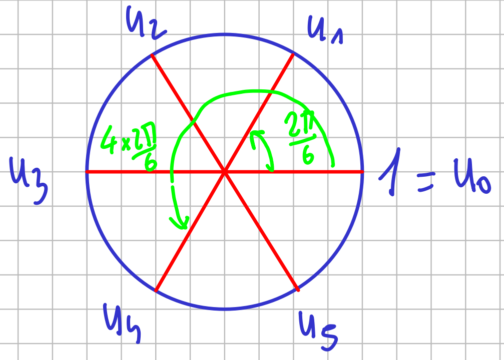
Théorème. Les racines n^e de l'unité sont les complexes $u_0, \dots, u_{n-1}$ définis par
$$u_k = e^{2i\frac{k\pi}{n}} = \exp\left(2i\frac{k\pi}{n}\right)$$
$k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Preuve du théorème

1/ Vérifions que si $k \in \{0, \dots, n-1\}$ alors $u_k = e^{2i\frac{k\pi}{n}}$ vérifie $u_k^n = 1$

On a
$$u_k^n = \left(e^{2i\frac{k\pi}{n}}\right)^n = \left(\exp\left(2i\frac{k\pi}{n}\right)\right)^n$$
$$= \exp\left(n\left(2i\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$
$$= \exp(2ik\pi)$$
$$= \left(\exp(2i\pi)\right)^k$$
$$= 1^k$$
$$= 1$$

$n=6$



Ceci montre que u_k est une racine n^e de 1.

2/ Réciproquement on considère $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^n = 1$ et on va montrer que u est égal à un des u_k.

Soit $u \in \mathbb{C}$. Si $u = 0$ $u^n = 0^n = 0 \neq 1$ donc si on considère que $u^n = 1$ nécessairement $u \neq 0$.

Soit $r = |u|$ $(r \neq 0)$ et soit θ un argument de u

$$u = r\exp(i\theta) = re^{i\theta}$$

On peut choisir $\theta \in [0, 2\pi[$

L'hypothèse $u^n = 1$ implique

$$1 = u^n = (r\exp(i\theta))^n = r^n \exp(i\theta)^n = r^n \exp(in\theta)$$

Par conséquent $r^n = 1$ et $r > 0$ donc $\boxed{r = 1}$

$$0 = \text{argument}(1) = n\theta \ (\text{modulo } 2\pi)$$

il existe un entier k tel que

$$0 = n\theta - 2k\pi$$

On a donc $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$ et $k = \dfrac{n\theta}{2\pi}$

Puisque $\theta \in [0, 2\pi[$ $k = \dfrac{n\theta}{2\pi} \in [0, n[$

Ainsi $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k \in [0, n[$

donc $\boxed{\theta = \dfrac{2k\pi}{n} \quad \text{avec } k \in \{0, \dots, n-1\}}$

On a donc $u = r\exp(i\theta)$ vérifie

$$u = 1 \times \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = u_k \text{ avec } k \in \{0, \dots, n-1\}$$

<u>Remarque</u> L'unité, 1, possède exactement n racines n^e c'est à dire si $k, \ell \in \{0, \dots, n-1\}$ avec $k \neq \ell$ alors $u_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \neq \exp\left(\frac{2i\ell\pi}{n}\right) = u_\ell$

preuve de la remarque.

Soit $k, l \in \{0, \dots, n-1\}$ avec $k \neq l$.

On a $\dfrac{u_k}{u_l} = \exp\left(2i\dfrac{k\pi}{n}\right) \Big/ \exp\left(2i\dfrac{l\pi}{n}\right)$

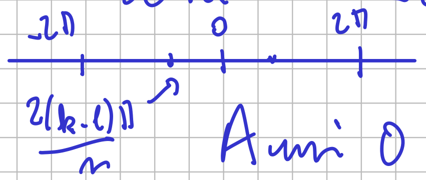
$= \exp\left(2i\dfrac{k\pi}{n}\right) \times \exp\left(-2i\dfrac{l\pi}{n}\right)$

$= \exp\left(2i(k-l)\dfrac{\pi}{n}\right)$

On a $k, l \in \{0, \dots, n-1\}$ et $k \neq l$

donc $-n < k-l < n$ et $k-l \neq 0$

donc $-2\pi < 2\dfrac{(k-l)\pi}{n} < 2\pi$ et $\dfrac{2(k-l)\pi}{n} \neq 0$



Ainsi $0 < \left|\dfrac{2(k-l)\pi}{n}\right| < 2\pi$

Or $2\left(\dfrac{k-l}{n}\right)\pi$ est un argument de $\dfrac{u_k}{u_l}$

Puisqu'en valeur absolue cet argument est dans $]0, 2\pi[$, ce n'est pas un argument de 1 on en déduit que $\dfrac{u_k}{u_l} \neq 1$

Ceci prouve que si $k, l \in \{0, \dots, n-1\}$ avec $k \neq l$ alors $u_k \neq u_l$.

2/ cas $a \in \mathbb{C}$ quelconque et $n \in \mathbb{N}^*$

. Si $a = 0$ alors sa seule racine n^e est 0

. On suppose $a \neq 0$

Soit $r = |a|$ $r > 0$ soit $\alpha \in [0, 2\pi[$ un argument de a

On a $a = re^{i\alpha} = r\exp(i\alpha)$

On considère $b_0 = r^{1/n} \exp\left(i\dfrac{\alpha}{n}\right)$.

On a $b_0^n = \left[r^{1/n} \exp\left(i\dfrac{\alpha}{n}\right)\right]^n$

$$= \left(r^{1/n}\right)^n \left(\exp\left(\frac{i\alpha}{n}\right)\right)^n$$
$$= r^{n/n} \exp\left(n \frac{i\alpha}{n}\right)$$
$$= r^1 \exp(i\alpha)$$
$$= r \exp(i\alpha)$$
$$= a$$

Ainsi le nombre b_0 est une racine n^e de a.

On considère maintenant $b_k = b_0 u_k$ $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

c'est à dire $b_k = \left[\underbrace{r^{1/n} \exp\left(\frac{i\alpha}{n}\right)}_{b_0}\right] \underbrace{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)}_{u_k}$

On a donc $b_k^n = (b_0 u_k)^n = b_0^n \cdot u_k^n$

$$= a \times 1$$
$$= a$$

Ainsi le nombre b_k est une racine n^e de a.

On vient de trouver n racines n^e de a $b_0, \dots, b_{n-1}$.

- Vérifions que si $k \neq l$ alors $b_k \neq b_l$.

Soit donc $k \neq l$ on a $b_k = b_0 u_k$ et $b_l = b_0 u_l$ avec $u_k \neq u_l$. Donc $\frac{b_k}{b_l} = \frac{b_0 u_k}{b_0 u_l} = \frac{u_k}{u_l} \neq 1$

car $u_k \neq u_l$.

Ainsi $\frac{b_k}{b_l} \neq 1$ et donc $b_k \neq b_l$

- Vérifions que si $u \in \mathbb{C}$ et $u^n = a$ alors $u \in \{b_0, \dots, b_{n-1}\}$

Soit donc $u \in \mathbb{C}$ / $u^n = a$

On a aussi $b_0^n = a$

Donc $1 = \frac{a}{a} = \frac{u^n}{b_0^n} = \left(\frac{u}{b_0}\right)^n$

Par conséquent $\frac{u}{b_0}$ est une racine n^e de 1. Ainsi il existe $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $\frac{u}{b_0} = u_k$ et donc $u = b_0 u_k = b_k$.

On vient de prouver :

Théorème Si $a \in \mathbb{C}^*$ ($a = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ $\alpha \in [0, 2\pi[$) alors a possède exactement n racines n^e distinctes qui sont $b_0, \dots, b_{n-1}$ avec

$$b_k = r^{1/n} \exp\left(i\frac{\alpha}{n}\right) \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) = r^{1/n} \exp\left(i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

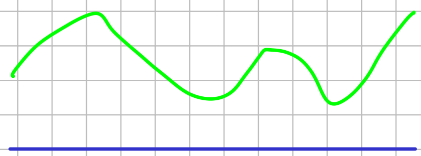
Analyse, fonctions numériques d'une variable réelle

0. Continuité, limite, dérivabilité en deux mots

Soit f une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une union finie d'intervalles et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition On aimerait dire que f est continue si on peut tracer son graphe au dessus de chaque intervalle de son domaine sans lever le crayon.

Pas continue



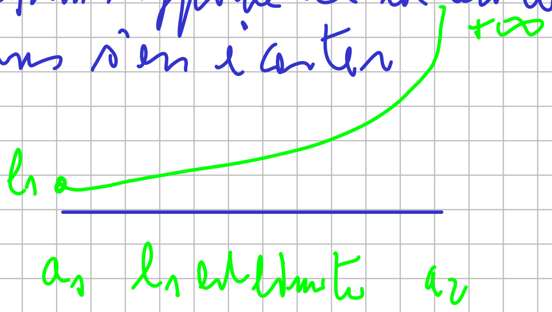
continue

Une façon plus rigoureuse consiste à dire que f vérifie

$$\forall a \in \text{Domaine}(f)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in \text{Domaine}(f)$$
$$|x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

définition On aimerait dire que f admet l comme limite en a si lorsqu'on trace le graphe de f on s'approche de (a, l) lorsqu'on s'approche de la droite $x=a$ sans s'en écarter

f n'admet pas l_1 comme limite en a_1 et l_2 en a_2

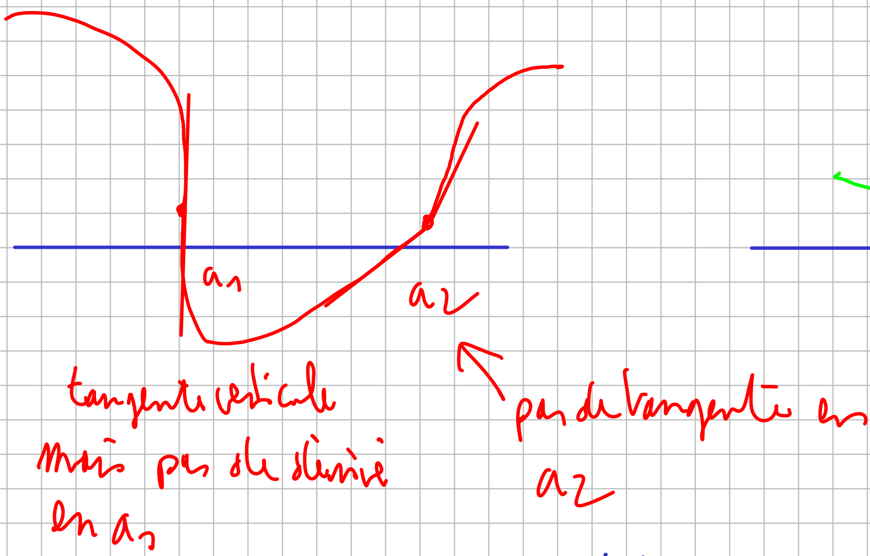


l_1 est limite de f en a_1 et $+\infty$ est limite de f en a_2

Ceci se traduit par

- $l \in \mathbb{R}$ est limite de f en a si
  $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in \text{Dom}(f)\ \ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
- $+\infty$ est limite de f en a
  $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \eta > 0\ \forall x \in \text{Dom}(f)\ \ |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > K$

définition : On aimerait dire que f admet comme nombre dérivée ℓ en a si la tangente au graphe de f en $(a, f(a))$ a pour pente ℓ.



Ceci se traduit mathématiquement par :

Le nombre ℓ est le nombre dérivé de f en a si ℓ est la limite du taux d'accroissement

$$x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ lorsque x tend vers a

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in \text{Domaine}(f) \ x \neq a$$
$$|x-a| < \eta \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell \right| < \varepsilon.$$

Une autre façon de l'écrire est

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in \text{Domaine}(f)$$
$$|x-a| < \eta \Rightarrow \left| f(x) - (f(a) + \ell(x-a)) \right| < \varepsilon |x-a|$$

Quelques résultats

Notation • $\lim_a f = l$ signifie que f admet l comme limite en a $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

• $f'(a) = l$ signifie que f admet l comme nombre dérivé (ou dérivée) en a.

Proposition Si $l, l' \in \mathbb{R}$ et $\lim_a f = l$ $\lim_a g = l'$ alors $\lim_a f+g = l+l'$ $\lim_a fg = ll'$

Proposition Si $b = \lim_a f$ et $l = \lim_b g$ alors $l = \lim_a g \circ f$

Proposition Si $\lim_a f = +\infty$ et $\lim_a g = +\infty$ alors $\lim_a f+g = +\infty$ $\lim_a fg = +\infty$

Proposition Si $\lim_a f = +\infty$ et $\lim_a g \in \mathbb{R}$ alors $\lim_a f+g = +\infty$

Proposition Si $\lim_a f = l \in \mathbb{R}^*$ alors $\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{l}$

Preuve de la dernière proposition

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que

$\lim_a f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}^*$.

Calculons $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{\ell}$

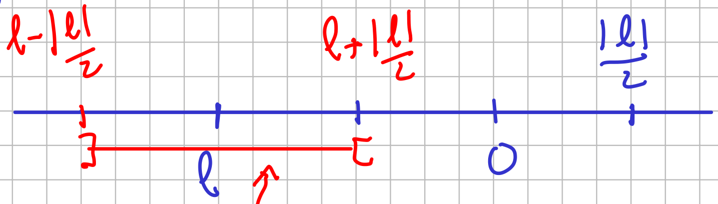
$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} = \frac{\ell - f(x)}{f(x)\,\ell}$$

Traduisons que $\lim_a f = \ell$

(*) $\Bigg($ Si $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in D$ et $|x-a| < \eta$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

On applique (*) avec $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$ ($\varepsilon > 0$ car $\ell \neq 0$)

il existe $\eta_0 > 0$ tel que si $x \in D$ et $|x-a| < \eta$ alors $|f(x) - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$



si $|x-a| < \eta$ alors

$f(x)$ est dans l'intervalle rouge

Or $|f(x) - \ell| < \frac{|\ell|}{2} \Longrightarrow |f(x)| > \frac{|\ell|}{2}$ (I)

<u>Soit $\varepsilon > 0$</u> quelconque.

On applique (*) avec non pas ε mais avec $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \times \dfrac{|\ell|^2}{2} > 0$ (car $\varepsilon > 0$ et $|\ell| > 0$)

il existe $\eta_1 > 0$ tel que si $x \in D$ et $|x-a| < \eta$

alors $|f(x) - \ell| < \tilde{\varepsilon} = \varepsilon \frac{|\ell|^2}{2}$ (II)

Soit $\eta = \min(\eta_0, \eta_1) > 0$

Soit $x \in D$ tel que $|x-a| < \eta$.

On a donc $|x-a| < \eta_0$ donc d'après (I)

on a que $|f(x)| > \frac{|\ell|}{2}$ donc $\frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|\ell|}$

on a aussi $|x-a| < \eta_1$ donc d'après (II)

$$|f(x) - \ell| < \tilde{\varepsilon} = \varepsilon \frac{|\ell|^2}{2}$$

On a donc $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|f(x)-\ell|}{|f(x)|\,|\ell|} < \frac{\varepsilon\frac{|\ell|^2}{2}\,\frac{2}{|\ell|}}{|\ell|}$

$< \varepsilon$

En résumé si $\varepsilon > 0$ il existe bien $\eta > 0$ tel que si $x \in D$ et $|x-a| < \eta$ alors $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| < \varepsilon$

Preuve du résultat sur la composition. On s'intéresse à $\lim_a g\circ f$ sachant que $\lim_a f = b$, $\lim_b g = \ell$

$$f : D \longrightarrow D_1 \text{ et } g : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Puisque $\lim_b g = \ell$ si $\varepsilon > 0$ il existe $\eta_0 > 0$ tel que si $y \in D_1$ et si $|y-b| < \eta_0$ alors $|g(y) - \ell| < \varepsilon$ (*)

Puisque $\lim_a f = b$ et puisque $\eta_0 > 0$ il existe $\eta_1 > 0$ tel que si $x \in D$ et si $|x-a| < \eta_1$ alors $|f(x) - b| < \eta_0$

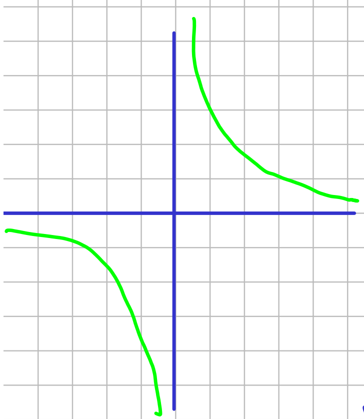
et donc puisque $|f(x) - b| < \eta_0$ (on utilise (*) avec $y = f(x)$) on a $|g(f(x)) - \ell| < \varepsilon$

En résumé si $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ (prendre $\eta = \eta_1$) tel que pour tout $x \in D$ si $|x-a| < \eta$ alors

$$|g(f(x)) - \ell| < \varepsilon.$$

Remarque. Lorsqu'une fonction admet une limite ℓ en a, cette limite est unique.

- Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue si elle a une limite en tout $a \in D$
- Si $\lim_a f = \pm\infty$ alors $\lim_a \frac{1}{f} = 0$
- Si $\lim_a f = 0$ et $f > 0$ alors $\lim_a \frac{1}{f} = +\infty$
- si $\lim_a f = 0$ et $f < 0$ alors $\lim_a \frac{1}{f} = -\infty$
- On peut aussi définir les limites à gauche et à droite $\lim_{a^-} f$ et $\lim_{a^+} f$



Par exemple $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ alors

$$\lim_{0^-} f = -\infty \qquad \lim_{0^+} f = +\infty$$

- On définit aussi les limites en $+\infty$ et en $-\infty$!

Deux exemples importants.

- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Cette fonction, constante égale à c, est continue.
En effet si $a \in \mathbb{R}$ et si $\varepsilon > 0$ alors en prenant $\eta = 1$ on a que si $x \in \mathbb{R}$ et $|x-a| < 1$ alors

$$|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$

Cette fonction, l'identité de $\mathbb{R}$, est continue
En effet si $a \in \mathbb{R}$ et si $\varepsilon > 0$ alors en prenant $\eta = \varepsilon$ on a que si $x \in \mathbb{R}$ et $|x-a| < \eta$ alors

$$|f(x) - f(a)| = |x-a| < \eta = \varepsilon.$$

Conséquence • Les polynomes $x \overset{P}{\longmapsto} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ sont des fonctions continues.

• Les fonctions rationnelles $\frac{P}{Q}$ avec P et Q polynômes sont continues sur $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.

Théorème Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et injective alors f est une bijection de I sur $f(I)$ et sa réciproque $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est continue

Exemple $f(x) = x + x^3 + x^5$ est un polynôme strictement croissant et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f continue donc la réciproque est continue.

Théorème (valeurs intermédiaires) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Si $a, b \in I$ alors quelque soit S compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = S$

Exemple $f(x) = x^7 + 2x^2 + 1$

Montrons qu'il existe x / $f(x) = 0$.

On a $f(0) = 1$ On a $f(-2) = \underbrace{-128 + 2 \times 4 + 1}_{-119} < 0$

Puisque le polynôme f est continu et que $f(0) = 1 > 0 > -119 = f(-2)$

il existe $c \in [-2, 0]$ tel que $f(c) = 0$.

Théorème. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I intervalle et soit $a \leq b \in I$ Alors il existe $m \leq M \in \mathbb{R}$ tels que $f([a,b]) = [m, M]$

Exemple Soit $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + 1$

Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$

alors $f([a,b]) = [m, M]$ où m et M sont à déterminer.

Dans ce cas

$$f(x) = 3x^2\left(x^2 + \frac{2}{3}\right) + 1$$
$$\geq f(0) = 1$$

car x^2 est minimal en $x=0$ et $x^2+\frac{2}{3}$ aussi

donc $3x^2\left(x^2+\frac{2}{3}\right)$ aussi

De plus si $0 \leq a \leq b$

alors $0 \leq f(a) \leq f(b)$

car $a^4 \leq b^4$ et $a^2 \leq b^2$

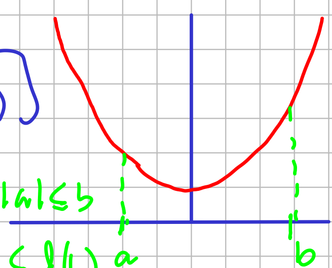
On a aussi $f(-x) = f(x)$

Ainsi si $0 \leq a \leq b$

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$$

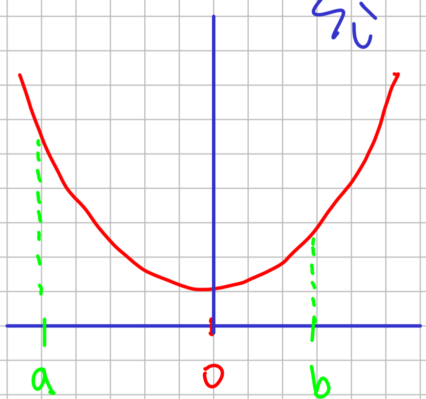
Si $a \leq b \leq 0$

$$f([a,b]) = [f(b), f(a)]$$



Si $a \leq 0 \leq b$

donc $f(a) \leq f(b)$



- $|a| < b$ alors $f([a,b]) = [f(0), f(b)]$
$= [1, f(b)]$

- $|a| \geq b$ alors $f([a,b]) = [f(0), f(a)]$
$= [1, f(a)]$

$|a| \geq b$ donc $f(a) = f(-a) = f(|a|) \geq f(b)$

Propriété de la dérivation (le fait de rechercher le nombre dérivé)

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$
$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$
$$(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \text{ (Leibniz)}$$
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \frac{-f'(a)}{f(a)^2}$$
$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$$
$$= (g' \circ f)(a) \times f'(a)$$

Monotonie et dérivée

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, c'est à dire qui admet une dérivée $f'(a)$ pour tout $a \in I$.

- Si f est croissante c'est à dire si $x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$ alors $f' \geqslant 0$
- Réciproquement si $f' \geqslant 0$ alors f est croissante.
- Si $f' > 0$ alors f est strictement croissante c'est à dire que si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$.
- $\triangle$ La fonction f peut être strictement croissante avec f' qui s'annule.
  exemple $f(x) = x^3$

Calcul de la dérivée

- Deux exemples
  - si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto c$ fct constante

Alors $f'(a) = 0$ si $a \in \mathbb{R}$.

en effet $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$.

  - si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$ fct identité

alors $f'(a) = 1$ si $a \in \mathbb{R}$

en effet $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{x-a}{x-a} = 1$

Conséquences. • Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \lambda x^n$ alors

$f'(a) = n\lambda a^{n-1}$

• Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$

alors $f'(x) = c_1 + 2c_2 x + \dots + n c_n x^{n-1}$

• si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ alors

$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$

Montrons cette dernière égalité à partir de la volonté de Leibniz et de $g'(x) = nx^{n-1}$ si $g(x) = x^n$

On a $f(x) \times g(x) = 1$ si $f(x) = \frac{1}{x^n}$
$g(x) = x^n$

donc $(f \times g)'(x) = 0$,

Or d'après Leibniz

$$(f \times g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

Donc $0 = (f \times g)'(x)$

$$= f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

$$= f'(x)\, x^n + \frac{1}{x^n}\, n\, x^{n-1}$$

Donc $f'(x) = -\frac{1}{x^n} \times \frac{1}{x^n}\, n\, x^{n-1}$

$$= -\frac{n}{x^{n+1}}$$

<u>Un autre exemple</u> : La fonction exponentielle

Il s'agit de l'unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée exp, vérifiant les propriétés suivantes :

1. La fonction exp est dérivable et si $x \in \mathbb{R}$ $\exp'(x) = \exp(x)$
2. Si $x, y \in \mathbb{R}$ $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

3. $\exp(0) = 1$ et $\exp'(0) = 1$

<u>Remarques</u> • De 1/ et de $\exp(0) = 1$
on déduit $\exp'(0) = \exp(0) = 1$

• Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et soit f définie par $f(x) = \exp(x+y)$
Cette fonction est dérivable et sa dérivée vaut
$$f'(x) = \exp'(x+y) \times 1$$
$$= \exp(x+y)$$
$$= f(x).$$

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{1}{\exp(y)} f(x)$$

On a $g(x) = \dfrac{1}{\exp(y)} f(x) = \dfrac{1}{\exp(y)} \exp(x+y)$

$$g'(x) = \frac{1}{\exp(y)} f'(x) = \frac{1}{\exp(y)} f(x)$$

et donc $g'(x) = g(x)$

Or $g(0) = \dfrac{f(0)}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = 1$

Finalement

La fonction g définie par
$$g(x) = \frac{1}{\exp(y)} \exp(x+y)$$ vérifie
$$\underbrace{g'(x) = g(x)}_{\text{l'équation de l'exponentielle}} \quad \text{et} \quad g(0) = 1$$
comme exp(0).

Si on sait montrer qu'il existe au plus 1 fonction qui vérifie 1/ ($f' = f$) et $f(0) = 1$
on en déduit que $g = \exp$.

Ceci implique $\exp(x) = g(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$

et donc $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$

Ceci montre que 2/ résulte donc alors de 1/ et de $\exp(0) = 1$

A propos du CC
Il contient un exercice sur les complexes où il s'agit
1/ de calculer le produit d'un complexe avec son conjugué
2/ de démontrer que si ce complexe est non nul alors le produit précédent est non nul
3/ de calculer le produit de ce complexe et d'un nombre qui se révèle être son inverse

Il contient aussi un exercice en 7 questions sur l'exponentielle.

Il s'agit de

1/ Montrer que l'exponentielle d'un réel multipliée par l'exponentielle de son opposé vaut 1 et donc que l'exponentielle ne s'annule pas

2/ de montrer que l'exponentielle est strictement positive en ayant montré au préalable que l'exponentielle d'un nombre est le carré de l'exponentielle de sa moitié,

$\exp(x) = \exp(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}) = \exp(\frac{x}{2}) \times \exp(\frac{x}{2}) = (\exp(\frac{x}{2}))^2$

3/ de montrer que l'exponentielle est strictement croissante en utilisant le fait qu'elle est sa propre dérivée et qu'elle strictement positive.

4/ Pour établir la stricte croissance de la fonction qui à un nombre associe la différence entre l'exponentielle de ce nombre et ce nombre, on dérive cette fonction et on constate que cette dérivée qui vaut l'exponentielle à laquelle on retranche 1 est strictement positive sur les réels strictement positifs. Ça permet de conclure à la croissance sur les positifs de la fonction considérée.

5/ La dernière question généralise consiste à montrer que $\exp(nx) > x^n$ par récurrence. On vérifie au rang 1 avec 4/ qui indique que $\exp(x) > x$ puis l'hérédité en supposant pour n fixé $\exp(nx) > x^n$ puis en écrivant

$$\exp((n+1)x) = \exp(nx) \times \exp(x) > x^n \times \exp(x) > x^n \times x$$