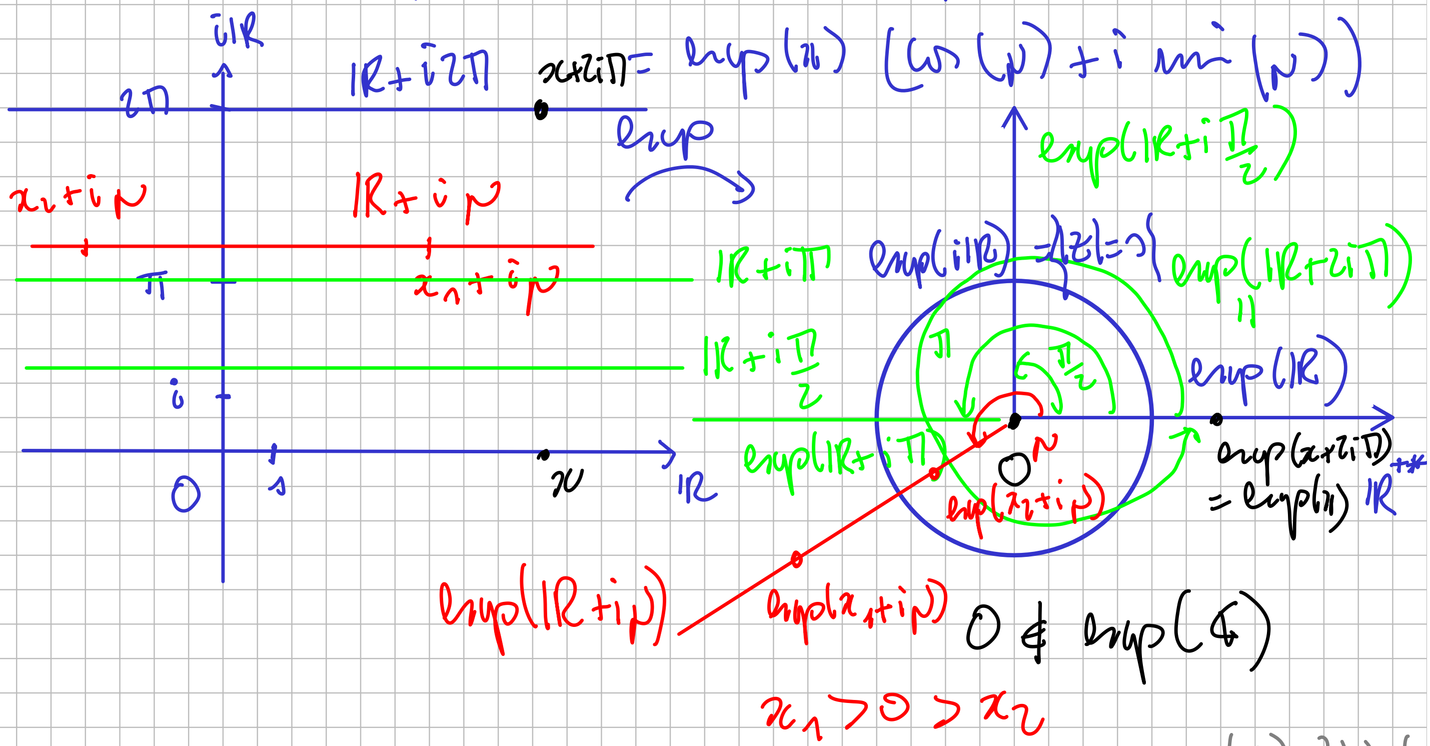
Pass option Maths
CMP3
25/01/2023

Après avoir étudié l'image par exp de $\lambda + i\mathbb{R}$ on étudie l'image par exp de $\mathbb{R} + i\mu$

On s'intéresse à $\{\exp(x+i\mu) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et μ fixé.

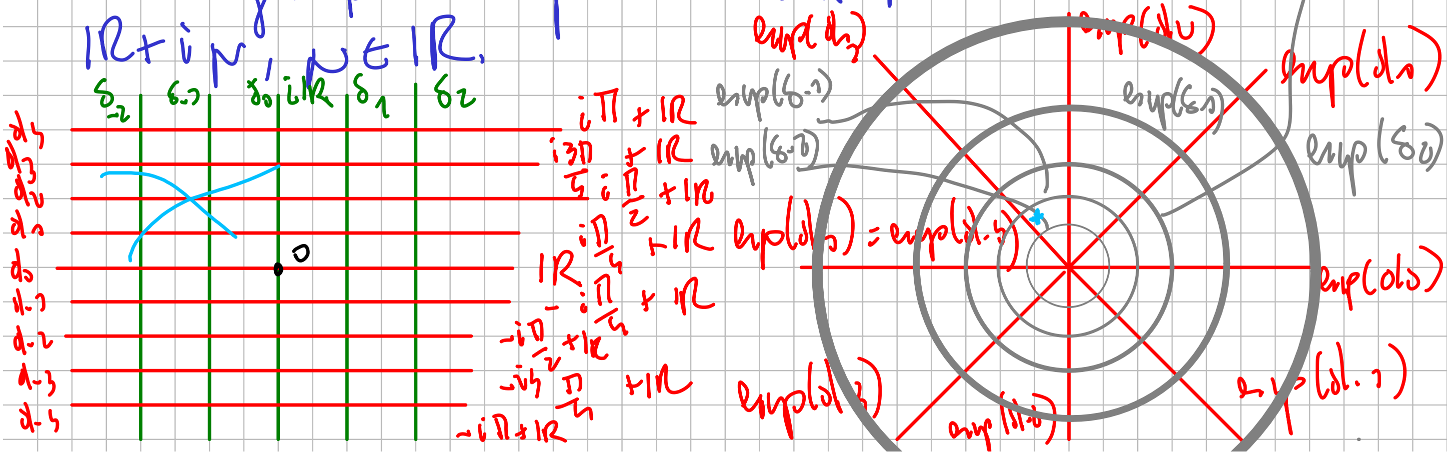
On a $\exp(x+i\mu) = \exp(x)\exp(i\mu)$

$= \exp(x)\left(\cos(\mu) + i\sin(\mu)\right)$



$\exp(\delta_0) = \{|z|=1\}$

Synthèse pour représenter sur un seul dessin les images par exp de $\lambda + i\mathbb{R}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} + i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.



Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ est une équation d'inconnue z du type $az^2+bz+c=0$ (*) avec $a,b,c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.

Résoudre (*) c'est trouver tous les complexes z tels que $az^2+bz+c=0$.

Puisque $a \neq 0$ (*) est équivalent à

$$z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0 \quad (*),$$

(on a factorisé a : $az^2+bz+c=a\left[z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right]$)

On transforme (*), en remarquant que

$$z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a} = z^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)z+\frac{c}{a}$$

$$= z^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}$$

Or on a, si $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 &= (\alpha+\beta)\times(\alpha+\beta)\\ &= \alpha\times(\alpha+\beta)+\beta\times(\alpha+\beta)\\ &= \alpha\times\alpha+\alpha\times\beta+\beta\times\alpha+\beta\times\beta\\ &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\end{aligned}$$

c'est à dire $\boxed{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \text{ si } \alpha,\beta\in\mathbb{C}}$

Appliquée avec $\alpha=z$ et $\beta=\frac{b}{2a}$ donne

$$z^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$$

On a donc $z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}$

L'équation $(*)$ devient

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 \quad (*)_2$$

Or on a si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $(\alpha+\beta)\times(\alpha-\beta)=(\alpha+\beta)\times\alpha-(\alpha+\beta)\times\beta$

$$=\alpha^2+\beta\alpha-\alpha\beta-\beta^2$$

$$=\alpha^2-\beta^2$$

c'est à dire $\boxed{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2 \text{ si } \alpha,\beta\in\mathbb{C}}$

Appliqué à $(*)_2$ avec $\alpha=z+\frac{b}{2a}$ et $\beta=\frac{b}{2a}$ $(*)_2$ ne donne pas grand chose. Pardon, excusez moi.

En ajoutant à gauche et à droite dans $(*)_2$ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$ on obtient

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Ainsi $(*)$ devient $\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$ $(*)_3$

Soit $\Delta=b^2-4ac$

1er cas $\Delta=0$ Dans ce cas $(*)$ devient $\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=0$

et donc $(*)$ admet une et une seule solution qui vaut $R=-\frac{b}{2a}$

2e cas $\Delta\neq 0$ Dans ce cas $\Delta=\rho\exp(i\theta)$

$\rho=|\Delta|$ est le module de Δ et $\rho\in\mathbb{R}^{+*}$

et $\theta\in[0,2\pi[$ est l'argument de Δ.

Posons $\delta=\sqrt{\rho}\times\exp\left(i\frac{\theta}{2}\right)$

On a
$$\begin{aligned}\delta^2 &= \left(\sqrt{\rho}\times\exp\left(i\tfrac{\theta}{2}\right)\right)^2\\ &= (\sqrt{\rho})^2\times\exp\left(i\tfrac{\theta}{2}\right)\times\exp\left(i\tfrac{\theta}{2}\right)\\ &= \rho\times\exp\left(i\tfrac{\theta}{2}+i\tfrac{\theta}{2}\right)\\ &= \rho\exp(i\theta)\\ &= \Delta\end{aligned}$$

L'équation (*) qui est équivalente $\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{(2a)^2}$ $(*)_3$

est donc équivalente à

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right) = \frac{\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad \left(z+\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\delta}{2a}$$

car Δ a deux racines δ et $-\delta$.

Par conséquent les racines de $az^2+bz+c=0$ (*) sont $R_1 = \frac{-b}{2a}+\frac{\delta}{2a}$ et $R_2 = \frac{-b}{2a}+\frac{\delta}{2a}$

C'est-à-dire

> Les racines de $az^2+bz+c=0$ (*), si $a\neq 0$ sont
>
> $$R_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$
>
> avec $\delta^2 = \Delta = b^2-4ac$

N.B. Ces formules marchent aussi si $\Delta=0$ et alors $\delta=0$ et on a $R_1=R_2=\frac{-b}{2a}$. On parle alors de racine double.

Finalement pour résoudre une équ. du 2nd degré ds $\mathbb{C}$ on a besoin de savoir calculer la racine d'un nombre complexe.

Soit $\Delta = \alpha + i\beta$. Recherchons les complexes δ vérifiant $\delta^2 = \alpha + i\beta$. On pose $\delta = A + iB$.

On a donc $\delta^2 = (A+iB)^2 = A^2 - B^2 + i2AB$

$|\delta|^2 = |A+iB|^2 = A^2+B^2$

L'équation $\delta^2 = \Delta$ est équivalente

$$\delta^2 = A^2 - B^2 + i2AB = \alpha + i\beta = \Delta$$

$$|\delta^2| = |\delta|^2 = A^2+B^2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = |\Delta|$$

On doit donc résoudre $\begin{cases} A^2 - B^2 = \alpha \\ A^2 + B^2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \end{cases}$ $2AB = \beta$

On a donc $\begin{cases} 2A^2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ 2B^2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha \end{cases}$ $2AB = \beta$

C'est-à-dire $\begin{cases} A^2 = \dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2} \\ B^2 = \dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha}{2} \end{cases}$ $2AB = \beta$

On a donc $\begin{cases} A = \pm\sqrt{\dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} \\ B = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha}{2}} \end{cases}$ $2AB = \beta$

Ceci permet de déterminer le signe de B en fonction du signe de A.

Puisque $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a $\alpha^2+\beta^2 \geq \alpha^2 \geq 0$ et donc $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ existe et $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \geq |\alpha| \geq 0$.

Par conséquent $\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \geqslant 0$ et on calcule des racines donc A est bien défini.

De même $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha \geqslant 0$ et on calcule de racines donc B est bien défini.

Application (exercice) Calcul de $\sqrt{5+7i}$

On cherche $A+iB$ tel que $(A+iB)^2 = 5+7i$

on a donc $A^2-B^2+2iAB = 5+7i$

et $|A+iB|^2 = A^2+B^2 = \sqrt{5^2+7^2} = \sqrt{74}$.

Ainsi $\left\{\begin{array}{l} A^2-B^2=5 \\ A^2+B^2=\sqrt{74} \end{array}\right.$ $2AB=7$ donc $AB>0$

Finalement $\left\{\begin{array}{l} A^2 = \dfrac{5+\sqrt{74}}{2} \\ B^2 = \dfrac{\sqrt{74}-5}{2} \end{array}\right.$ et $AB>0$

donc les solutions sont

$$A_1+iB_1 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{74}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{74}-5}{2}}$$

et

$$A_1+iB_2 = -(A_1+iB_1) = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{74}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{74}-5}{2}}$$