Pass option Maths
CMP3
18/01/2023

• On a fait apparaître la semaine dernière un polynôme du second degré $C+Bx+Ax^2$ qui est positif ou nul quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Il a été affirmé que dans ce cas $\Delta = A^2 - 4BC \leq 0$.

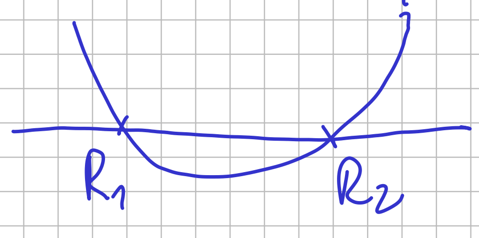
Ceci est justifié de la façon suivante.

Si $\Delta > 0$ alors il existe $r_1 < r_2$ tels que

$$0 = C + Br_1 + Ar_1^2 = C + Br_2 + Ar_2^2$$

Les nombres r_1 et r_2 sont donc racines distinctes de $C+Bx+Ax^2=0$

Le polynôme $C+Bx+Ax^2$ est alors du signe de A $(A>0)$ hors des racines (sur $]-\infty,R_1[\,\cup\,]R_2,+\infty[$) et (si $z\neq0$) strictement négatif entre les racines (car $A>0$ (si $z\neq 0$)) c'est-à-dire sur $]-R_1,R_2[$



Comme $C+Bx+Ax^2 \geq 0$ pour tout x, l'équation $C+Bx+Ax^2=0$ ne peut avoir deux racines réelles distinctes et donc $\Delta = B^2-4AC \leq 0$.

Le cas $z=0$ donne $z'+z = z'+0 = z'$
et donc $|z'+z| = |z'|$ et $z = \lambda z'$ avec $\lambda = 0$.

• Traitons le cas de l'égalité $z\overline{z'} + z'\overline{z} = |z\overline{z'}+z'\overline{z}| = 2|z||z'|$

le nombre $z\overline{z'}+z'\overline{z}$ est égal à $z\overline{z'}+\overline{z\overline{z'}}$ *

par conséquent $z\overline{z'}+z'\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'})$

L'égalité $z\overline{z'}+z'\overline{z}=|z\overline{z'}+z'\overline{z}|$

est donc équivalente à $2\mathrm{Re}(z\overline{z'})=|2\mathrm{Re}(z\overline{z'})|$

et donc ceci n'est vrai que si $\mathrm{Re}(z\overline{z'})\geq 0$.

On a $2|z||z'|=2|z||\overline{z'}|\overset{**}{=}2|z\overline{z'}|$

Par conséquent l'égalité $|z\overline{z'}+z'\overline{z}|=2|z||z'|$

est équivalente à $2|\mathrm{Re}(z\overline{z'})|=2|z\overline{z'}|$

et donc à $|\mathrm{Re}(z\overline{z'})|=|z\overline{z'}|$

Or $|z\overline{z'}|^2=\mathrm{Re}(z\overline{z'})^2+\mathrm{Im}(z\overline{z'})^2$

donc $|\mathrm{Re}(z\overline{z'})|=|z\overline{z'}|$ est équivalente

$\mathrm{Re}(z\overline{z'})^2=|z\overline{z'}|^2$

et donc à $|\mathrm{Im}(z\overline{z'})|^2=0$ c'est-à-dire

$\mathrm{Im}(z\overline{z'})=0$.

On a $z=x+iy$ $z'=x'+iy'$

Or $z\overline{z'}=(x+iy)(x'-iy')$
$=(xx'+yy')+i(yx'-xy')$

Donc $\mathrm{Im}(z\overline{z'})=0$ est équivalent à $yx'-xy'=0$

<u>Si $z\neq 0$</u> ceci signifie qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$(x',y')=\lambda(x,y)$. Ainsi $x'=\mathrm{Re}(z')=\lambda x=\lambda\,\mathrm{Re}(z)$.

De plus $0 \leq \mathrm{Re}(z\overline{z'}) = (xx'+yy') = \lambda(x^2+y^2)$
et donc $\lambda \geqslant 0$.

Ainsi le cas d'égalité arrive si $z=0$ ou si $z \neq 0$
et $z' = \lambda z$ avec $\lambda \geqslant 0$ (si $z=0$ $z = \lambda z'$ avec $\lambda = 0$).

On vient d'utiliser les deux propriétés suivantes.

si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ alors $\boxed{\begin{array}{l} \overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad * \\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \quad ** \end{array}}$

Preuve de * et **

Posons $z_1 = x_1+iy_1$ $z_2 = x_2+iy_2$

alors $\overline{z_1} = x_1-iy_1$ $\overline{z_2} = x_2-iy_2$

donc
$$\begin{aligned}
\overline{z_1}+\overline{z_2} &= (x_1-iy_1)+(x_2-iy_2) \\
&= (x_1+x_2)-i(y_1+y_2) \\
&= \overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\
&= \overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} \\
&= \overline{z_1+z_2}
\end{aligned}$$

Ceci prouve *.

De plus
$$\begin{aligned}
\overline{z_1}\times\overline{z_2} &= (x_1-iy_1)(x_2-iy_2) \\
&= [x_1x_2-(-y_1)(-y_2)]+i(x_1(-y_2)+(-y_1)x_2) \\
&= (x_1x_2+y_1y_2)-i(x_1y_2+y_1x_2) \\
&= \overline{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)}
\end{aligned}$$

$$= \overline{z_1 z_2}$$

Ceci prouve $**$.

Exercice Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ Montrons que $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$

(c'est à dire $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$).

Méthode 1 (simple mais complexe).

On pose $z = x+iy$ on a $\bar{z} = x-iy$

on a aussi $z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}$

donc $\overline{z^{-1}} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{y}{x^2+y^2}$

Puisque $\bar{z} = x-iy = x+i(-y)$ on a

$$(\bar{z})^{-1} = \frac{x}{x^2+(-y)^2} - i\,\frac{(-y)}{x^2+(-y)^2}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

c'est à dire $(\bar{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$

Méthode 2 (complexe mais simple)

Par définition de z^{-1} on a

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

Or $\overline{z \cdot z^{-1}} = \bar{z} \cdot \overline{z^{-1}}$ (par $**$)

donc $1 = \bar{1} = \bar{z} \times \overline{z^{-1}}$

et donc $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$.

Argument d'un nombre complexe (non nul)

Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

On a $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \in]0, +\infty)$

Si on pose $\boxed{c = \frac{x}{|z|} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}}$ et $s = \frac{y}{|z|} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$

On a $c^2+s^2 = \frac{x^2}{|z|^2} + \frac{y^2}{|z|^2} = \frac{x^2+y^2}{|z|^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$

On a donc $c^2+s^2=1$

Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ telque $\cos(\theta)=c$ $\sin(\theta)=s$.
Un tel nombre s'appelle argument de z.

L'ensemble $\{\theta\in\mathbb{R} \mid \cos(\theta)=c,\ \sin(\theta)=s\}$ est de la forme $\{\theta_z + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ avec $\theta_z \in [0, 2\pi[$

Interprétation géométrique des complexes, le plan complexe.

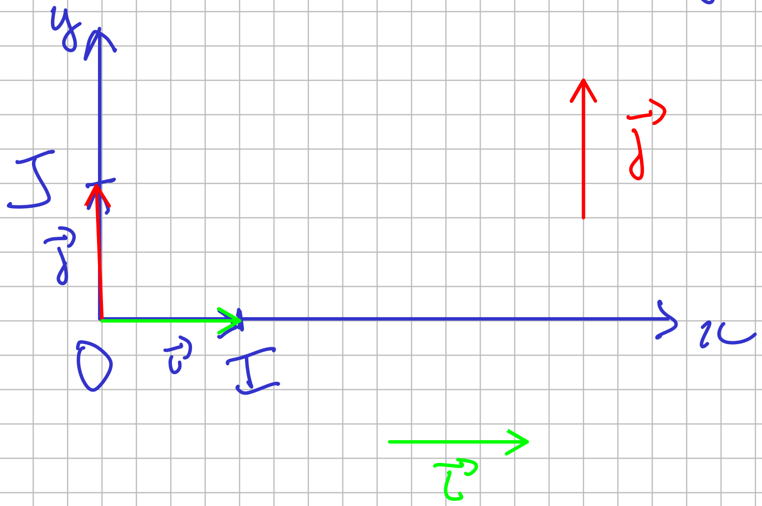
Quand on fait de la géométrie plane et euclidienne on identifie le plan physique à $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne définie par $d(A,B) = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$

où $A=(x_A,y_A)$ et $B=(x_B,y_B)$.

Le point $O=(0,0)$ s'appelle l'origine du repère choisi dans l'identification du plan physique et de $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $\vec{i}=(1,0)$ et $\vec{j}=(0,1)$ forment une base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j})$

de $\mathbb{R}^2$. Il existe deux points I et J de coordonnées $(1,0)$ et $(0,1)$.

On a $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$



Parler du plan complexe consiste à considérer le plan $\mathbb{R}^2$ euclidien muni du repère orienté $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $(\vec{i},\vec{j})$ base orthogonale.

et à identifier $z = x+iy$ avec le point M de coordonnée (x,y) [et avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (x,y) : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}$)

Ainsi $1 \longmapsto (1,0)$
$i \longmapsto (0,1)$

Soit $z = x+iy$ avec $z \neq 0$ $(z \neq 0+i0)$

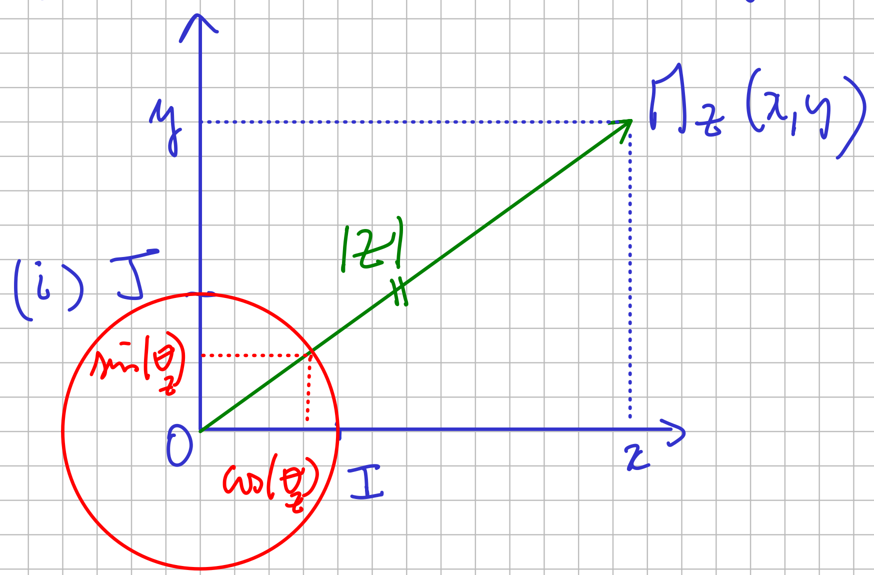
On a $x = |z|\cos(\arg(z))$ $y = |z|\sin(\arg(z))$

car $\cos(\arg(z)) = \frac{x}{|z|}$

$\sin(\arg(z)) = \frac{y}{|z|}$

Le point M_z correspondant M_z de coordonnées (x,y) vérifie $\|\overrightarrow{OM_z}\| = d(O, M_z) = |z|$

argument $\left(\text{Angle}\left(O\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_z}\right)\right) = \arg(z) = \theta_z$



<u>Exponentielle complexe</u>

L'exponentielle complexe est l'application $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par

$$\exp(a+ib) = \exp(a) \times (\cos(b) + i\sin(b))$$

Par conséquent $\exp(a+ib)$ est le nombre complexe z de module $|z| = \exp(a)$ et d'argument $\text{argument}(z) = b$

En effet $\mathrm{Re}(\exp(a+ib)) = \exp a \times \cos(b)$

$\operatorname{Im}(\exp(a+ib)) = \exp a \times \sin(b)$

Propriété importante (prté de morphisme de exp)

$$\boxed{\text{Si } z, z' \in \mathbb{C} \quad \exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')}$$

Preuve. On écrit $z = a+ib$
$z' = a' + ib'$

Donc $\exp(z+z') = \exp((a+ib)+(a'+ib'))$

$= \exp((a+a') + i(b+b'))$

$= \exp(a+a') \times (\cos(b+b') + i\sin(b+b'))$

$= \exp(a)\exp(a') \times \left\{ \begin{array}{l} (\cos(b)\cos(b') - \sin(b)\sin(b')) \\ + i(\sin(b)\cos(b') + \cos(b)\sin(b')) \end{array} \right.$

$= \exp(a)\exp(a') \times (\cos(b) + i\sin(b))(\cos(b') + i\sin(b'))$

$= [\exp(a)(\cos(b) + i\sin(b))] \times [\exp(a')(\cos(b') + i\sin(b'))]$

$= \exp(a+ib) \times \exp(a'+ib')$ $\square$

Cette preuve utilise $\cos(\theta+\theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')$
$\sin(\theta+\theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')$

Propriété. Si $z = i\theta = 0 + i\theta$ alors
$\exp(z) = \exp(0+i\theta) = \exp(0) \times (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

$= \cos(\theta) + i \sin(\theta).$

Par conséquent $|\exp(i\theta)| = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$

Ainsi l'exponentielle complexe envoie $i\mathbb{R} = \{ i\theta \mid \theta \in \mathbb{R} \}$ sur le cercle unité

. Si $z = \lambda + i\theta$ alors

$\exp(z) = \exp(\lambda + i\theta) = \exp(\lambda) \times (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

et donc $|\exp(z)| = \exp(\lambda).$

Ainsi l'exponentielle complexe envoie $\lambda + i\mathbb{R} = \{ \lambda + i\theta \mid \theta \in \mathbb{R} \}$ sur le cercle de rayon $\exp(\lambda)$.