Pass option Maths
CMP3
11/01/2023

Nombres complexes (suite)

opposé et inverse de $\mathbb{C}$

. Preuve du fait que si $(x,y) \in \mathbb{C}$ alors il existe $(x',y') \in \mathbb{C}$ / $(x,y)+(x',y') = (0,0)$ (tout élément de $\mathbb{C}$ admet un inverse pour + (appelé opposé)) et du fait que si $(x,y) \neq (0,0)$ alors il existe $(x'',y'') \in \mathbb{C}$ tel que $(x,y)\times(x'',y'') = (1,0)$ (tout élément de $\mathbb{C}$ différent de $(0,0)$ admet un inverse pour la multiplication.

observation . Si $(x,y) \in \mathbb{C}$ alors

$$(x,y)+(0,0) = (x+0,y+0) = (x,y) = (0+x,0+y) = (0,0)+(x,y)$$

ceci signifie que $(0,0)$ est bien le neutre pour +.

. Si $(x,y) \in \mathbb{C}$ alors

$$(x,y)\times(1,0) = (x.1-y.0,\ x.0+y.1) = (x,y)$$

et $(1,0)\times(x,y) = (1.x-0.y,\ 1.y+0.x) = (x,y)$

Ceci signifie que $(1,0)$ est bien le neutre pour $\times$.

Recherche de l'opposé d'un complexe (x,y).

On cherche donc (x',y') tel que

$$(x,y)+(x',y') = (0,0) \quad (\text{et } (x',y')+(x,y) = (0,0))$$

On a $(x,y)+(x',y') = (x+x',\ y+y')$

Donc (x',y') est l'opposé de (x,y) si et seulement si

$$x+x' = 0 \quad \text{et} \quad y+y' = 0$$

et donc si et seulement $x' = -x$ et $y' = -y$.

Ainsi (x,y) admet bien un opposé qui est $(-x,-y)$.

Recherche de l'inverse pour $\times$ d'un complexe non nul (x,y)

On cherche donc (x'',y'') tel que

$$(x,y)\times(x'',y'') = (1,0) \quad (\text{et } (x'',y'')\times(x,y) = (1,0))$$

On a $(x,y)\times(x'',y'') = (xx''-yy'',\ xy''+yx'')$

Donc (x'', y'') est l'inverse pour $\times$ de (x,y) si et seulement si

$$x x'' - y y'' = 1 \quad \text{et} \quad x y'' + y x'' = 0 \qquad (*)$$

Le système linéaire $(*)$ d'inconnue (x'', y'') est équivalent aux systèmes suivants

$$(*)_1 \quad \begin{cases} x \times (x x'' - y y'') - (-y) \times (x y'' + y x'') = x \times 1 - (-y) \times 0 = x \\ y \times (x x'' - y y'') - x \times (x y'' + y x'') = y \times 1 - x\, 0 = y \end{cases}$$

$$(*)_2 \quad \begin{cases} x^2 x'' + y^2 x'' = x \\ -y^2 y'' - x^2 y'' = y \end{cases}$$

$$(*)_3 \quad \begin{cases} (x^2+y^2)\, x'' = x \\ -(x^2+y^2)\, y'' = y \end{cases}$$

$$(*)_4 \quad \left\{ x'' = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad y'' = \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

⚠ division possible car puisque $(x,y) \neq (0,0)$ le nombre $x^2+y^2 > 0$.

Ceci prouve que l'inverse pour $\times$ de $(x,y) \neq (0,0)$ existe bien, qu'il est unique et qu'il est égal à $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

<u>Notation, partie réelle et partie imaginaire d'un nombre complexe $z = (x,y)$</u>

- On a posé $i = (0,1)$ et montré que $i^2 = -1$.
- On a identifié $\mathbb{R}$ et $\{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ et donc $1 \in \mathbb{R}$ est identifié à $(1,0) \in \mathbb{C}$.
- Soit $z = (x,y) \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} z &= (x,y) \\ &= (x,0) + (0,y) \\ &= x.(1,0) + y.(0,1) \\ &= x.\underbrace{1}_{(1,0)=1} + y\underbrace{i}_{(0,1)=i} \\ &= x + yi = x + iy \end{aligned}$$

Le nombre complexe $z=(x,y)$ s'écrit $\boxed{z = x+iy}$

Le nombre réel x s'appelle la partie réelle de z et le nombre réel y s'appelle la partie imaginaire de z.

On note $\boxed{Re(z) = x \quad Im(z) = y}$

On a $\boxed{z = Re(z) + i\, Im(z)}$

Conjugué d'un nombre complexe

Si $z=(x,y)$ ($z = x+iy$) alors le conjugué $\overline{z}$ de z est le complexe $\boxed{\overline{z} = (x,-y)}$ c'est à dire $\boxed{\overline{z} = x - iy}$.

On a $\boxed{\begin{array}{l} Re(\overline{z}) = Re(z) \\ Im(\overline{z}) = -Im(z) \end{array}}$

Propriété L'application qui à $z \in \mathbb{C}$ associe son conjugué $\overline{z}$ est appelée conjugaison et c'est une involution c'est à dire $\overline{\overline{z}} = z$.

Preuve Soit $z = (x,y)$. Alors $\overline{z} = (x,-y)$

Donc $\overline{\overline{z}} = \overline{(x,-y)} = (x,-(-y)) = (x,y) = z$.

Ona Si $z \in \mathbb{C}$ alors $\boxed{\begin{array}{l} z+\overline{z} = 2Re(z) \\ z - \overline{z} = 2 i Im(z) \end{array}}$

Module et argument d'un complexe $z = (x,y) = x+iy$

Module Soit $z = (x,y) = x+iy$. Son module $|z|$ est le réel $|z| = (x^2+y^2)^{1/2} = \sqrt{x^2+y^2}$.

Propriétés
1. $|z|^2 = z \times \overline{z}$ si $z \in \mathbb{C}$
2. $|\lambda z| = |\lambda|\,|z|$ si $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $|z z'| = |z|\,|z'|$ si $z, z' \in \mathbb{C}$
4. $|z^{-1}| \times |z| = 1$ si $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} = \mathbb{C}^*$

Preuve . On considère $z=(x,y)=x+iy$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

1. On a $\bar{z}=x-iy$

donc $z\bar{z}=(x+iy)\times(x-iy)$

$= x^2-(iy)^2$ On utilise $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ si $a,b \in (A,+,\times)$ anneau commutatif

$= x^2-(i)^2y^2$

$= x^2-(-1)y^2$

$= x^2+y^2$

$= |z|^2$

Autre preuve $z\bar{z}=(x,y)\times(x,-y)$

$=(xx-y(-y),\ x(-y)+yx)$ déf de $\times$

$=(x^2+y^2,\ 0)$

$= x^2+y^2$

$=|z|^2$

2. $\lambda z=\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$

Donc $|\lambda z|^2=(\lambda x)^2+(\lambda y)^2$

$=\lambda^2x^2+\lambda^2y^2$

$=\lambda^2(x^2+y^2)$

$=\lambda^2|z|^2$

En passant à la racine carrée on obtient

$|\lambda z|=|\lambda|\,|z|$ ← module

↑ valeur absolue ou module

(Remarque si $\lambda\in\mathbb{R}$ $\lambda=(\lambda,0)\in\mathbb{C}$ donc
$|\lambda|\in\mathbb{R}$ vaut aussi $|\lambda|=\sqrt{\lambda^2}=\sqrt{\lambda^2+0^2}=|(\lambda,0)|$
↑ V.A

Module ↓

$=|\lambda|$

↑ Module)

3. Calculons $|z.z'|^2$ avec $z=(x,y)$, $z'=(x',y')$

$z.z'=(xx'-yy',\ xy'+yx')$

Donc $|zz'|^2=(xx'-yy')^2+(xy'+yx')^2$ on utilise $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$$= (xx')^2 \underline{-2(xx')(yy')} + (yy')^2 + (xy')^2 \underline{+2(xy')(yx')} + (yx')^2$$

$$= (xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (yx')^2$$
$$= x^2(x'^2+y'^2) + y^2(y'^2+x'^2)$$
$$= (x^2+y^2) \times (x'^2+y'^2)$$
$$= |z|^2 \times |z'|^2 = (|z| \times |z'|)^2$$

En passant à la racine carrée on obtient $|zz'| = |z| \times |z'|$

4. Soit $z = (x,y) = x+iy \neq (0,0)$ Soit z^{-1} son inverse. On a $z \cdot z^{-1} = 1$

Donc d'après 3 $|1| = |z \cdot z^{-1}| = |z| \times |z^{-1}|$

On $|1| = 1$ donc

$$1 = |z| \times |z^{-1}| = |z^{-1}| \times |z|.$$

<u>Propriété</u> (Inégalité triangulaire)

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|$$

et l'égalité n'a lieu que s'il existe un réel positif ou nul λ tel que $z = \lambda z'$ ou $z' = \lambda z$.

<u>Preuve</u> Pour prouver ce résultat il suffit de prouver

$$|z+z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$$

En fait on va introduire un réel x quelconque et on va s'intéresser à

$$|z + xz'|^2 \leq (|z| + |xz'|)^2$$

$$\underbrace{|z+xz'|^2}_{\in \mathbb{R}^+} = (z+xz') \cdot (\bar{z} + x\bar{z'})$$
$$= z\bar{z} + x(z'\bar{z} + z\bar{z'}) + x^2 z'\bar{z'}$$
$$= \underbrace{|z|^2}_{\in \mathbb{R}^+} + \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}}(z'\bar{z} + z\bar{z'}) + \underbrace{x^2|z'|^2}_{\in \mathbb{R}^+}$$

Puisque tous les termes indiqués sont réels

$$z'\bar{z} + z\bar{z'} = \frac{|z+xz'|^2 - |z|^2 - x^2|z'|^2}{x} \quad (\text{si } x \neq 0)$$

est un réel

On pose $A = |z'|^2 \in \mathbb{R}$ $B = z'\bar{z} + z\bar{z'} \in \mathbb{R}$

$C = |z|^2 \in \mathbb{R}$

On a donc $0 \leq C + Bx + Ax^2$ avec $x \in \mathbb{R}$

Par conséquent $C + Bx + Ax^2 = 0$ est une équation du second degré qui admet au plus une racine réelle. Ainsi son discriminant

$$\Delta = B^2 - 4AC \leq 0$$

Ainsi $\boxed{(z'\bar{z} + z\bar{z'})^2 \leq 4|z|^2|z'|^2}$ (I)

De cette inégalité on déduit l'inégalité triangulaire

Retour sur l'inégalité triangulaire

On a $(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|$

On a aussi $|z+z'|^2 = |z|^2 + (z\bar{z'} + z'\bar{z}) + |z'|^2$

Pour prouver que $|z+z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$

Il suffit de prouver que

$$z\bar{z'} + z'\bar{z} \leq 2|z||z'|$$

Mais cette inégalité est déduite de l'inégalité (I)

Ceci prouve l'inégalité.

On a égalité si et seulement

$$z\bar{z'} + z'\bar{z} = |z\bar{z'} + z'\bar{z}| = 2|z||z'|.$$