Pass option Maths
CMP3
04/01/2023

Nombres complexe

Rappel sur les nombres.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- $\mathbb{N}$: entiers naturels $(0,1,2,\dots)$
- $\mathbb{Z}$: entiers relatifs $(n+x=m)$
- $\mathbb{Q}$: rationnels $(ax=b)$
- $\mathbb{R}$: On considère une suite croissante de décimaux. Si elle est bornée, alors elle "va", "s'approche", converge vers un réel.

Parmi les rationnels il y a les décimaux. Ce sont les nombres de la forme $\frac{q}{10^p}$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$.
Ils forment l'ensemble $\mathbb{D}$.

$3,\ 7,\ 10,\ 27,\ 3{,}14 \in \mathbb{D}$

Les décimaux admettent une écriture en base dix qui est finie.
Par exemple $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal. Son écriture en base dix est
$0{,}333\dots3\dots$

Ici il est question d'écriture décimale. Cette écriture s'appuie sur les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qui sont des idéogrammes.

Existe-t-il des réels qui ne sont pas des rationnels ?

Deux exemples. . Le réel $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel
En effet si c'était un rationnel il existerait $p, q \in \mathbb{N}$

tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q sans facteur commun

On aurait $2 = (\sqrt{2})^2 = \frac{p^2}{q^2}$ Donc $2q^2 = p^2$

Ainsi 2 divise p^2. Ainsi $\boxed{2|p}$. Donc il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $2r = p$ donc

$$2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2 \quad \text{donc} \quad q^2 = 2r^2.$$

Ainsi 2 divise q^2. Ainsi $\boxed{2|q}$

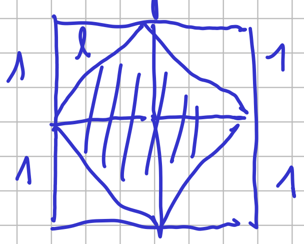
Le fait que $2|p$ et $2|q$ contredit le fait que p et q n'ont pas de facteur en commun.

Donc l'hypothèse de départ qui est $\sqrt{2}$ rationnel est fausse (puisqu'elle aboutit à une contradiction.

Ainsi ceci prouve (par l'absurde) que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

$\sqrt{2}$ existe bien c'est la diagonale d'un carré de côté 1

(Pythagore) $1^2 + 1^2 = 2 = \sqrt{2}^2$



Le petit carré hachuré a une aire qui est la moitié de celle du grand carré de côté 2

On a donc $2\ell^2 = 4$ et $\ell^2 = 2$ d'où $\ell = \sqrt{2}$

Deuxième exemple. On considère le nombre x suivant.

$$x = 0,1101000100000001 \ldots\ldots \underset{\text{rang } 2^n}{1} \_0\_\_\_0\_0\_\_ \underset{\text{rang } 2^{n+1}}{1}.$$

Ce nombre réel n'est pas rationnel car son écriture en base dix n'a pas une fin périodique alors qu'un nombre du type $\frac{p}{q}$ a une écriture en base dix avec une fin périodique de période au plus q.

Par exemple

$$\begin{array}{l|l} 1 & 7 \\ \hline 10 & 0,\underline{142857}\,142857142857\ldots \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 10 & \end{array}$$

Pour comprendre que le nombre x précédent n'est pas rationnel on a besoin de voir qu'entre le rang 2^n et le rang 2^{n+1} il y a au moins n zéros. Prouvons le.

On calcule $2^{n+1} - 2^n = 2^n[2-1] = 2^n$

il y a donc $2^n - 1$ zéros entre le rang 2^n et le rang 2^{n+1}. Montrons que $2^n - 1 \geq n$ pour conclure.

On va donc montrer $2^n - 1 \geq n$ si $n \in \mathbb{N}$ c'est à dire

$$1+n \leq 2^n \quad (*)_n$$

Preuve par récurrence de l'inégalité $(*)_n$ $n \in \mathbb{N}$.

__Initialisation :__ $n=0$ on a $1+0=1$ et $2^0=1$ donc on a bien $1+0 \leq 2^0$ et $(*)_0$ est vérifiée.

__Hérédité :__ On n'écrit pas "On suppose que $(*)_n$ est vrai pour tout n" ou "On suppose $\forall n \in \mathbb{N}$ $(*)_n$ vrai"! Mais on écrit :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $(*)_n$ est vrai et

Montrons que cette hypothèse implique que $(*)_{n+1}$ est vraie. On part donc de $1+n \leq 2^n$

en multipliant par 2 les deux termes de l'inégalité on obtient

$$2+2n = 2(1+n) \leq 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

et donc $\quad 2+2n \leq 2^{n+1}$

Puisque $n \in \mathbb{N}$ on a $n \leq 2n$ Donc

$$1+(n+1) = 2+n \leq 2+2n \leq 2^{n+1}$$

et donc $\quad 1+(n+1) \leq 2^{n+1}$

Ceci prouve l'hérédité.

<u>Conclusion</u> Puisque $(*)_0$ est vraie et $(*)_n$ est héréditaire on a bien que si $n \in \mathbb{N}$ $(*)_n$ est vraie c'est à dire $1+n \leq 2^n$.

Sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{D}, \mathbb{R}$ il y a les lois $+, \times$ qui sont associatives, commutatives, $\times$ est distributive par rapport à $+$, $+$ admet comme neutre 0, $\times$ admet comme neutre 1, les éléments de $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Q}, \mathbb{D}, \mathbb{R}$) sont inversibles pour $+$ avec inverse dans $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Q}, \mathbb{D}, \mathbb{R}$).
Les éléments de $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$) sont inversibles pour $\times$ avec inverses dans $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$).

<u>Groupes commutatifs</u> $(\mathbb{Z},+), (\mathbb{Q},+), (\mathbb{D},+), (\mathbb{R},+)$

<u>Anneaux commutatifs</u> $(\mathbb{Z},+,\times), (\mathbb{Q},+,\times), (\mathbb{D},+,\times), (\mathbb{R},+,\times)$

<u>Corps commutatifs</u> $(\mathbb{Q},+,\times)$ et $(\mathbb{R},+,\times)$

Polynômes (et fonctions polynomiales)

Ce sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \longmapsto P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Par exemple
$$P(x) = 1 + x^{\boxed{1}}$$
$$P(x) = 3 + 7x^{\boxed{1}}$$
$$P(x) = x^{\boxed{2}} - 5x + 6$$
$$P(x) = x^{\boxed{2}} + 1$$
$$P(x) = 1 + 2x + 4x^7 + 17x^{\boxed{23}}$$

degré

On se pose la question suivante. Soit P un polynôme existe-t-il un nombre x réel que $P(x) = 0$?

Si on prend $P(x) = 1 + x^2$ alors on constate que $x^2 \geq 0$ si $x \in \mathbb{R}$ et donc $P(x) = 1 + x^2 \geq 1 > 0$

Donc il n'existe pas de réel x tel que $1 + x^2 = 0$.

On introduit les nombres complexes pour résoudre cette équation

<u>Définition</u> Le corps commutatif $(\mathbb{C}, +, \times)$ est défini de la façon suivante :
- $\mathbb{C} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.
- $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$
- $(x,y) \times (x',y') = (xx' - yy', xy' + yx')$

Théorème $(\mathbb{C},+,\times)$ est bien un corps commutatif

Quelques calculs. • On pose $i=(0,1)$. Calculons i^2

$$i^2=(0,1)\times(0,1)=(0\times 0-1\times 1,\ 0\times 1+1\times 0)$$
$$=(-1,0)$$

donc $i^2=(-1,0)$

• $(\lambda,0)\times(x,y)=(\lambda x-0y,\ \lambda y+0x)$
$=(\lambda x,\lambda y)$

Cette propriété permet d'identifier $\mathbb{R}$ et le sous ensemble $\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$ de $\mathbb{C}$

Avec cette identification l'égalité $i^2=(-1,0)$ devient $i^2=-1$ c'est à dire

$$1+i^2=0$$

On vient de montrer que dans $\mathbb{C}$ l'équation $1+X^2=0$ admet au moins une solution.