Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2022-2023

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Contrôle continu 2 - 45 minutes

Traiter au choix quatre questions.

Lorsqu'on traite une question on peut admettre les réponses aux questions qui la précèdent dans le sujet.

Les réponses sont justifiées.

1/ Montrer que la fonction définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$ ne possède pas d'extremum bien que ses dérivées partielles f'_x et f'_y s'annulent simultanément en $(0,0)$.

2/ Montrer que les dérivées partielles f'_x et f'_y de la fonction définie par $f(x,y) = x^2+3y^2+2x+y+1$ s'annulent simultanément en un point où f présente un minimum.

3/ Énoncer le théorème de Rolle et en déduire que la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \cos(x^3(x^7-1)^5) + x\ln(2-2x+x^2)\exp(x^2)$ s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

4/ Soit $x \in \mathbf{R}$. Calculer $f(x) = \displaystyle\int_0^x t\cos(t)dt$.

5/ Montrer par récurrence sur n que si $x \in \mathbf{R}$ alors $(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}$.

6/ Montrer que si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \leq \frac{1}{1-x} \leq \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{1}{2^n}$.

7/ Montrer que si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ alors $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x)$.

8/ Montrer que les fonctions dérivables f et g définies par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}x^k \text{ et } g(x) = f(x) + \frac{1}{2^n}x$$

vérifient

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \text{ et } g'(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{1}{2^n}.$$

9/ Montrer que si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}x^k \leq -\ln(1-x) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}x^k + \frac{1}{2^n}x$.

10/ En déduire que $\frac{5}{8} \leq \ln(2) \leq \frac{7}{8}$.