Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2022-2023

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Contrôle continu 1 - 45 minutes

Les réponses sont justifiées.

1/ Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.

1/ Démontrer l'égalité $(x+iy) \times (x-iy) = x^2 + y^2$.

2/ Démontrer que si $z \neq 0$ alors $x^2 + y^2 \neq 0$.

3/ On suppose $z \neq 0$ et on pose $z' = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$. Calculer $z \times z'$.

2/ On rappelle que la fonction exponentielle qui est notée exp vérifie les propriétés suivantes qui sont les seules qui sont autorisées à être utilisées dans l'exercice. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbf{R}$, elle vaut 1 en 0, elle est dérivable et $\exp' = \exp$ et elle vérifie $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ si $x, y \in \mathbf{R}$.

1/ Montrer que si $x \in \mathbf{R}$ alors $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ et en déduire que l'exponentielle ne s'annule jamais.

2/ Montrer que si $x \in \mathbf{R}$ alors $\exp(x) = \left(\exp(\frac{x}{2})\right)^2$ et en déduire que si $x \in \mathbf{R}$ alors $\exp(x) > 0$.

3/ Montrer que l'exponentielle est croissante et en déduire que si $x \geq 0$ alors $\exp(x) \geq 1$.

4/ Montrer que la la fonction f la définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(x) = \exp(x) - x$ est croissante et en déduire que si $x > 0$ alors $\exp(x) > x$.

5/ Montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que si $x > 0$ alors $\exp(nx) > x^n$.

6/ En déduire que si $n \in \mathbf{N}^*$ et si $y > 0$ alors $n^n \exp(y) > y^n$.

7/ En déduire que si $m \in \mathbf{N}$, $A > 0$ et $y > (m+1)^{m+1} \times A$ alors $\dfrac{\exp(y)}{y^m} > A$.

Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2022-2023

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 4 (CMP4)

Géométrie et dénombrement

Contrôle continu blanc 1 - 45 minutes

1/ Une urne contient 2 cubes rouges, 6 tétraèdres rouges, 5 cubes blancs, 5 tétraèdres blancs. *On donnera les réponses aux deux questions de l'exercice en utilisant des coefficients binomiaux, sans chercher à calculer leurs valeurs.*

a. De combien de façons peut-on tirer 5 objets de cette urne en obtenant exactement deux objets blancs ?

b. De combien de façons peut-on tirer 5 objets de cette urne en obtenant au moins un cube **ou** exactement deux objets blancs ?

2/ On dispose de 10 billets de 10 euros. De combien de façons peut-on mettre ces 10 billets

a. dans 3 enveloppes numérotées de 1 à 3 ;

b. dans 3 enveloppes indiscernables.

3/ Soient trois points de l'espace affine P, Q, R. Montrer qu'il existe un unique point G tel que

$$\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GR}=\overrightarrow{0}$$

Soit I le milieu de $[P,Q]$. Trouver une relation entre $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{GR}$.