Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2022-2023

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Version provisoire du 3 janvier 2023

Programme

Nombres complexes Définition de l'ensemble des nombres complexes. Parties réelle et imaginaire. Module. Argument. Équations du second degré à coefficients complexes. Racines énièmes. Exponentielle complexe et applications à la trigonométrie.

Fonctions réelles (techniques fondamentales de calcul en analyse) Fonctions classiques : polynômes (et leur division euclidienne), fractions rationnelles, logarithme, exponentielle, fonctions trigonométriques et trigonométriques hyperboliques. Composition de fonctions. Continuité et opérations algébriques Dérivation en un point. Dérivation et opérations avec composition et inverse. Application à l'étude du sens de variation d'une fonction. Fonctions de 2 ou 3 variables. Définition, composition, dérivées partielles.

Primitives et intégrales Quelques primitives classiques. Intégration par parties. Changement de variable. Linéarité de l'intégration. Lien entre intégrale et primitive. Application à la définition du logarithme et de l'exponentielle.

Remarque 1

Ce polycopié est directement inspiré des notes de cours des modules "A01" et "AN1" rédigées entre 2006 et 2008 par les équipes pédagogiques de l'UFR Mathématiques.

Remarque 2

Les résultats exposés dans ce cours sont généralement admis. En revanche on expliquera comment les utiliser. L'objet du cours est de permettre à la personne qui le suit de confirmer et renforcer sa pratique de l'utilisation des premiers outils de l'analyse réelle et complexe.

Première partie
Les nombres complexes

1 Construction du corps des complexes, C

Définition 1.1 On note $\mathbf{C}$ et on appelle **corps des complexes** l'ensemble des couples de réels muni des trois lois suivantes : si (x, y) et (x', y') sont dans $\mathbf{C}$ et λ dans $\mathbf{R}$

— **addition**
$$(x, y) +_{\mathbf{C}} (x', y') = (x + x', y + y')$$
— **multiplication**
$$(x, y) \times_{\mathbf{C}} (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$
— **multiplication par un réel**
$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Les éléments de $\mathbf{C}$ s'appellent **nombres complexes** ou **complexes**.

Notations 1.1 Le complexe $(0, 0)$ est noté $0_{\mathbf{C}}$, le complexe $(1, 0)$ est noté $1_{\mathbf{C}}$ et le complexe $(0, 1)$ est noté i.

Proposition 1.1 *Soient $z = (x, y), z' = (x', y'), z'' = (x'', y'')$ des complexes et λ, λ' des réels. Ils vérifient les proriétés suivantes.*

— $0_{\mathbf{C}} +_{\mathbf{C}} z = z +_{\mathbf{C}} 0_{\mathbf{C}} = z$ *($0_{\mathbf{C}}$ neutre pour $+_{\mathbf{C}}$)*
— $z +_{\mathbf{C}} (-x, -y) = (-x, -y) +_{\mathbf{C}} z = 0_{\mathbf{C}}$ *(tout élément admet un inverse pour $+_{\mathbf{C}}$)*
— $z +_{\mathbf{C}} (z' +_{\mathbf{C}} z'') = (z +_{\mathbf{C}} z') +_{\mathbf{C}} z''$ *($+_{\mathbf{C}}$ est associative)*
— $z +_{\mathbf{C}} z' = z' +_{\mathbf{C}} z$ *($+_{\mathbf{C}}$ est commutative)*

$(\mathbf{C}, +_{\mathbf{C}})$ *est un* **groupe commutatif**

— $\lambda \cdot (z + z') = \lambda \cdot z +_{\mathbf{C}} \lambda \cdot z'$
— $(\lambda + \lambda') \cdot z = \lambda \cdot z +_{\mathbf{C}} \lambda' \cdot z$
— $(\lambda\lambda') \cdot z = \lambda \cdot (\lambda' \cdot z)$

$(\mathbf{C}, +_{\mathbf{C}}, \cdot)$ *est un* **R-espace vectoriel**

— $1_{\mathbf{C}} \times_{\mathbf{C}} z = z \times_{\mathbf{C}} 1_{\mathbf{C}} = z_{\mathbf{C}}$ *($1_{\mathbf{C}}$ neutre pour $\times_{\mathbf{C}}$)*
— *Si $z \neq 0_{\mathbf{C}}$ alors $z \times_{\mathbf{C}} (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}) = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}) \times_{\mathbf{C}} z = 1_{\mathbf{C}}$ (tout élément différent de $0_{\mathbf{C}}$ admet un inverse pour $\times_{\mathbf{C}}$)*
— $z \times_{\mathbf{C}} (z \times_{\mathbf{C}} z'') = (z \times_{\mathbf{C}} z') \times_{\mathbf{C}} z''$ *($\times_{\mathbf{C}}$ est associative)*
— $z \times_{\mathbf{C}} (z' +_{\mathbf{C}} z'') = (z \times_{\mathbf{C}} z') +_{\mathbf{C}} (z \times_{\mathbf{C}} z'')$ *($\times_{\mathbf{C}}$ est distributive par rapport à $+_{\mathbf{C}}$)*
— $z \times_{\mathbf{C}} z' = z' \times_{\mathbf{C}} z$ *($\times_{\mathbf{C}}$ est commutative)*

$(\mathbf{C} \setminus \{0\}, \times_{\mathbf{C}})$ *est un* **groupe commutatif** *et* $(\mathbf{C}, +_{\mathbf{C}}, \times_{\mathbf{C}})$ *est un* **corps commutatif**

— $\lambda \cdot z = (\lambda, 0) \times_{\mathbf{C}} z$

*Ceci permet d'***identifier** *les réels et les complexes de la forme $(x, 0)$.*

Convention L'identification des réels avec les complexes de la forme $(x, 0)$ conduit à identifier 0 et $0_{\mathbf{C}}$ ainsi que 1 et $1_{\mathbf{C}}$. Dans la suite on notera $+_{\mathbf{C}}$ et $\times_{\mathbf{C}}$ simplement $+$ et $\times$ et on adoptera pour les complexes les mêmes règles d'écriture des opérations et des parenthèses que pour les réels.

Notations 1.2 Soit $z = (x, y)$.

— On pose $-z = (-x, -y)$. C'est l'**opposé de** z, c'est à dire l'**inverse** pour $+$.
— Si $z \neq 0$ on pose $z^{-1} = \frac{1}{z} = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$. C'est l'**inverse de** z, c'est à dire l'**inverse** pour $\times$.

Définition 1.2 Si $z = (x, y)$ on appelle **partie réelle de** z et on note $\mathrm{Re}(z)$ le nombre x et on appelle **partie imaginaire de** z et on note $\mathrm{Im}(z)$ le nombre y.

Notation 1.3 Le complexe $z = (x, y)$ s'écrit aussi de manière unique $z = x + iy = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$ avec $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$. Ceci signifie que le couple $\{1, i\}$ est **une base** du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$ qui est de **dimension** 2.

Définition 1.3 Un complexe z est dit **imaginaire pur** si sa partie réelle est 0. L'ensemble des imaginaires purs est $i\mathbf{R}$ et on a $\mathbf{C} = \mathbf{R} + i\mathbf{R}$.

Proposition 1.2

$$i^2 = -1$$

Ainsi, alors que l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbf{R}$ elle en possède deux dans $\mathbf{C}$ qui sont i et $-i$.

Proposition 1.3 *Soient $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors*

$$\sum_{n=0}^{n-1} z^k = 1 + ... + z^k + ...z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Proposition 1.4 *Soient $a, b \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n - k)!} a^k b^{n-k}.$$

2 Conjugué, module et argument d'un nombre complexe

Définition 2.1 On appelle **conjugué du nombre complexe** $z = x + iy$ (avec $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$) et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.

Proposition 2.1 *Soient $z, z' \in \mathbf{C}$.*
- $\overline{\overline{z}} = z$ *(la conjugaison est une* **involution***)*
- $\overline{-z} = -\overline{z}$
- $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$ *si* $z \neq 0$
- $z\overline{z} = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)$
- $\overline{z} = z$ *si et seulement si z est réel*
- $\overline{z} = -z$ *si et seulement si z est imaginaire pur*
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$

Définition 2.2 On appelle **module de** z et on note $|z|$ la racine carrée de $z\overline{z} = \mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)$.

Proposition 2.2 *Si $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ alors* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Proposition 2.3 *Soient $z, z' \in \mathbf{C}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.*
- $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$
- $|z| = |-z|$
- $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ *si* $z \neq 0$
- $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$ *(***inégalité triangulaire** *)*
- $|\lambda z| = |\lambda||z|$

— $|zz'| = |z||z'|$

Ainsi le module est une **norme**.

On déduit de cette proposition le résultat suivant.

Proposition 2.4 *Les ensembles* $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ *et* $S = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ *munis de la multiplication sont des groupes commutatifs : ils contiennent le neutre pour la multiplication,* 1, *et si* $z, z', z'' \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *(respectivement* $z, z', z'' \in S$*) alors* $zz' = z'z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *(respectivement* $zz' = z'z \in S$*),* $\frac{1}{z} \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *(respectivement* $\frac{1}{z} \in S$*) et* $z(z'z'') = (zz')z''$.

Définition 2.3 L'ensemble $S = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ s'appelle le **cercle unité**.

Définition 2.4 Soit $z \neq 0$. Puisque $\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} + i\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{z}{|z|}$ est de module 1 il existe un θ dans $\mathbf{R}$ tel que $\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$. Ce nombre θ est un **argument** de z. Les nombres r et θ associés à z s'appellent **coordonnées polaires de** z.

Proposition 2.5 *Soit* $z \neq 0$ *et* θ *un argument de* z*. Alors les arguments de* z *sont les réels de la forme* $\theta + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Proposition 2.6 *Tout complexe non nul* z *est déterminé par son module* r *et un de ses arguments* θ : $z = r(cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Proposition 2.7 *Si* z *et* z' *sont deux complexes non nuls de modules* r *et* r' *et d'arguments* θ *et* θ' *alors* zz' *est de module* rr' *et d'argument* $\theta + \theta'$:

$$[r(cos(\theta) + i\sin(\theta))][r'(cos(\theta') + i\sin(\theta'))] = (rr')(cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')).$$

3 Les racines d'un polynôme d'ordre 2 à coefficients complexes

Proposition 3.1 *Soient* $a, b, c \in \mathbf{C}$ *avec* $a \neq 0$*. On note* δ *une racine carrée de* $\Delta = b^2 - 4ac$*. Alors*

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \textbf{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

sont les solutions de l'équation

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Proposition 3.2 *Soit* $\Delta = X + iY$ *un complexe non nul. L'équation* $\delta^2 = \Delta$ *posède exactement deux solutions* $\delta_1 = x + iy$ *et* $\delta_2 = -\delta_1$*. On a* $x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $x^2 - y^2 = X$ *et* $2xy = Y$*. Par conséquent* x^2 *et* $-y^2$ *sont solution de l'équation*

$$Z^2 - XZ - \frac{Y^2}{4} = 0.$$

On a

$$x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{X^2 + Y^2} + X), \quad y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{X^2 + Y^2} - X).$$

De plus x *et* y *sont de même signe si* $Y \geq 0$ *et ils sont de signes opposés si* $Y < 0$.

4 Exponentielle complexe

Définition 4.1 L'**exponentielle complexe** est l'application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ qui à $z = x + iy$ associe le complexe $\exp(z) = e^z$ de module $\exp(x) = e^x$ et d'argument y :

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))$$

qu'on écrit aussi

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Cette application prolonge à $\mathbf{C}$ l'exponentielle définie sur $\mathbf{R}$.

Proposition 4.1 *Si $z = x + iy$ alors*

$$\exp(z) = \exp(x)\exp(iy)$$

qu'on écrit aussi

$$e^{(x+iy)} = e^x e^{iy}.$$

En particulier

$$\cos(y) + i\sin(y) = \exp(iy) = e^{iy}.$$

Proposition 4.2 *Si a et $b \in \mathbf{C}$, la fonctoin de la variable réelle définie par $t \mapsto b\exp(at)$ est dérivable (ceci signifie que ses deux fonctions coordonnées sont dérivables) et sa dérivée est la fonction $t \in \mathbf{R} \mapsto ab\exp(at)$.*

Proposition 4.3 *(***Identité d'Euler***)*

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Proposition 4.4 *L'exponentielle est une surjection de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Plus précisément si $Z = X + iY \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ alors les antécédents de Z par l'exponentielle complexe sont les complexes de la forme $z = x + iy$ avec $x = \ln(|Z|)$ et $y = \theta + 2k\pi$ où θ est un argument de Z et k un entier relatif.*

Proposition 4.5 *Si $z, z' \in \mathbf{C}$ alors*

$$\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$$

qu'on écrit aussi

$$e^{(z+z')} = e^z e^{z'}.$$

Proposition 4.6 *Si $t \in \mathbf{R}$ alors*

$$\begin{aligned}
\cos(t) &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cosh(it) \\
\sin(t) &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{\sinh(it)}{i} \\
\tan(t) &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{i(e^{it} + e^{-it})} = \frac{\tanh(it)}{i}.
\end{aligned}$$

Proposition 4.7 Linéarisation *Si $n \in \mathbf{N}$ alors*

$$\begin{aligned}
\cos^n(t) &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{2^n}e^{i(2k-n)t} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{2^n}\cos\left((2k-n)t\right) \\
\sin^n(t) &= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{2^n}e^{i(2k-n)(t-\frac{\pi}{2})} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{2^n}\cos\left((2k-n)(t-\frac{\pi}{2})\right).
\end{aligned}$$

Exemple 4.1

$$\begin{aligned}
\cos^3(t) &= \frac{1}{2^3}\cos(-3t)+\frac{3}{2^3}\cos(-t)+\frac{3}{2^3}\cos(t)+\frac{1}{2^3}\cos(3t) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3t)+\frac{3}{4}\cos(t) \\
\sin^3(t) &= \frac{1}{2^3}\cos(-3(t-\frac{\pi}{2}))+\frac{3}{2^3}\cos(-(t-\frac{\pi}{2}))+\frac{3}{2^3}\cos(t-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2^3}\cos(3(t-\frac{\pi}{2})) \\
&= -\frac{1}{4}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin(t).
\end{aligned}$$

Proposition 4.8 *(***Formule de Moivre***) Si $t \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$ alors*

$$\cos(nt)+i\sin(nt) = (\cos(t)+i\sin(t))^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cos^k(t)\sin^{n-k}(t)i^{n-k}.$$

Exemple 4.2 La formule de Moivre permet de calculer rapidement $\cos(3t)$ et $\sin(3t)$. On a

$$\cos(3t)+i\sin(3t) = \cos^3(t)+3i\cos^2(t)\sin(t)-3\cos(t)\sin^2(t)-i\sin^3(t)$$

et en séparant les parties réelles et imaginaires on trouve

$$\cos(3t) = \cos^3(t)-3\cos(t)\sin^2(t),\ \sin(3t) = 3\cos^2(t)\sin(t)-\sin^3(t)$$

puis en utilisant l'identité $\cos^2+\sin^2=1$ on obtient

$$\cos(3t) = 4\cos^3(t)-3\cos(t),\ \sin(3t) = 3\sin(t)-4\sin^3(t) = 4\cos^2(t)\sin(t)-\sin(t).$$

Proposition 4.9 *Soit $z = r\exp(it) \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ et $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$. L'équation $Z^n = z$ a exactement n solutions complexes, les nombres*

$$z_0 = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{it}{n}}, ..., z_k = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i(t+2k\pi)}{n}}, ..., z_{n-1} = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i(t+2(n-1)\pi)}{n}}.$$

En particulier l'équation $Z^n = 1$ a exactement n solutions complexes appelées **racines n-èmes de l'unité***. Ceux sont les nombres*

$$u_0 = 1, ..., u_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}, ..., u_{n-1} = e^{\frac{i2(n-1)\pi}{n}}.$$

Proposition 4.10 *L'ensemble $U_n = \{u_0, ..., u_{n-1}\}$ des racines n-èmes de l'unité muni de la multiplication est un groupe commutatif.*

Proposition 4.11 *Les racines n-èmes de l'unité différentes de 1 sont les solutions de l'équation*

$$1+...+z^k+...+z^{n-1} = 0.$$

Proposition 4.12
$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i2k\pi}{n}} = 0.$$

Exemples 4.3
- 1 et -1 sont les racines carrées de 1
- $1, j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les racines cubiques de 1
- $1, i, -1$ et $-i$ sont les racines quatrièmes de 1
- $1, 1+j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, j, -1, j^2$ et $1+j^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les racines sixièmes de 1
- $1, \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), i, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), -1, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i), -i$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ sont les racines huitièmes de 1
- $1, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}, 1+j, i, j, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}, j^2, -i, -j$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ sont les racines douzièmes de 1

5 Interprétation géométrique

Considérons un **plan affine euclidien et orienté $\mathcal{P}$ muni du repère orthormé direct** $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Au point M de coordonnées (x, y) dans ce repère correspond le complexe $z = x + iy$ qui est appelé **affixe de** M. La **norme** du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est égale au module de z : $||\overrightarrow{OM}|| = |z|$. La **mesure algébrique de l'angle orienté** $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ est égale à un argument de z (si $M \neq O$, ce qui est équivalent à dire si $z \neq 0$). L'identification point/affixe qu'on opère permet de visualiser les complexes ou inversement de résoudre des problèmes de géométrie plane à l'aide de ces nombres.

Le plan $\mathcal{P}$ ainsi indentifié à $\mathbf{C}$ est appelé **plan complexe**. Le complexe 0 est identifié à l'origine O, le complexe 1 est identifié au point de coordonnées $(1, 0)$ et le complexe i au point $(0, 1)$. L'axe des abscisses est identifié à $\mathbf{R}$ et celui des ordonnés à $i\mathbf{R}$. Enfin, si A et B sont deux points de $\mathcal{P}$ d'affixes a et b on identifie le vecteur $\overrightarrow{AB}$ au complexe $b - a$. La norme $||\overrightarrow{AB}||$ est égale au module $|b - a|$.

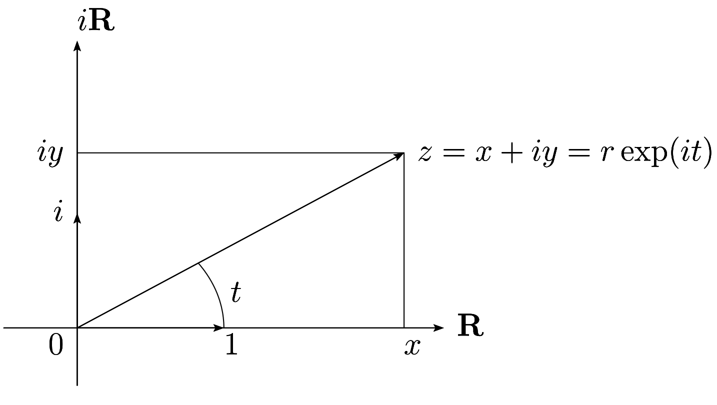


FIGURE 1 – Représentation graphique de $\mathbf{C}$.

Proposition 5.1 *Si A, B et C sont trois points distincts du plan affine euclidien d'affixes respectifs a, b et c alors la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est égale à l'argument du complexe* $\dfrac{b-c}{a-c}$.

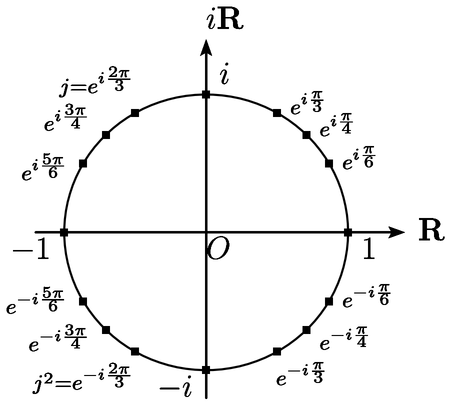


FIGURE 2 – Des racines de l'unité.

6 Droites et cercles

Proposition 6.1 *Soit δ une droite du plan $\mathcal{P}$ identifié avec $\mathbf{C}$.*

— *Si $0 \in \delta$ et $r_0 e^{it_0} \in \delta \setminus \{0\}$ alors*

$$\delta = \{z = re^{it_0} | r \in \mathbf{R}\}.$$

— *Si $0 \notin \delta$ il existe $r_0 > 0$ et $t_0 \in \mathbf{R}$ tels que*

$$\delta = \{z = \frac{r_0}{\cos(t)} e^{i(t_0+t)} | t \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\} = r_0 e^{it_0} + \mathbf{R} e^{i(t_0 + \frac{\pi}{2})}.$$

Le point $z_0 = r_0 e^{it_0}$ est le point de δ le plus proche de l'origine.

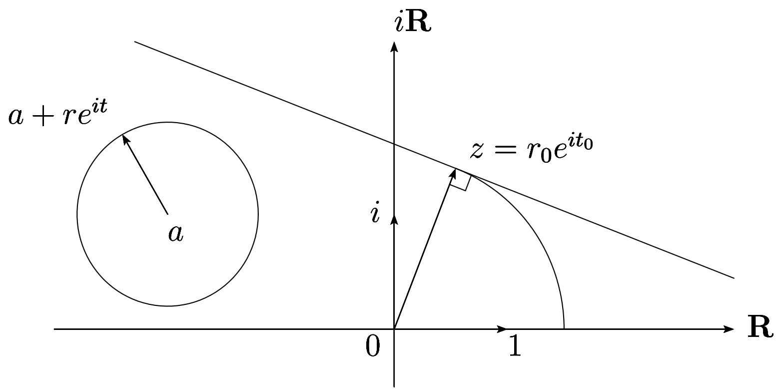


FIGURE 3 – Une droite et un cercle dans $\mathbf{C}$

Proposition 6.2 *Soit C un cercle du plan $\mathcal{P}$ identifié avec $\mathbf{C}$. Si a est son centre et r son rayon alors*

$$C = \{z \in \mathbf{C} | z - a = r \exp(it), t \in \mathbf{R}\}.$$

Proposition 6.3 *Soit $z_0 = r_0 e^{it_0} \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et C le cercle qui passe par 0 et z_0 et de centre $\frac{z_0}{2}$. Alors*

$$C = \{z = (r_0 \cos(t)) \exp(i(t_0 + t)) | t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}.$$

Proposition 6.4 *L'image de la droite $x + i\mathbf{R}$ par l'exponentielle est le cercle de centre l'origine et de rayon e^x.*

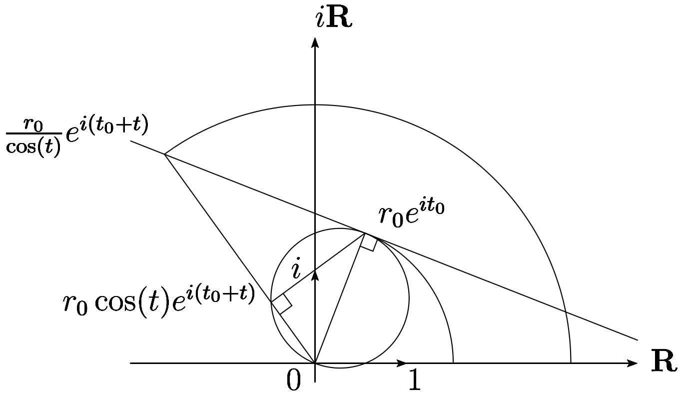


FIGURE 4 – Cercle qui passe par 0 et $z_0 = r_0e^{it_0}$.

7 Similitudes planes directes et indirectes, isométries et rotations

Proposition 7.1 *L'ensemble $\mathcal{S}^+$ des applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbf{C}$ muni de la loi de composition est un groupe. C'est le* **groupe des similitudes planes directes**.

Proposition 7.2 *Les applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ de la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbf{C}$ sont les* **similitudes planes indirectes**. *La composée de deux similitudes planes indirectes est une similitudes plane directe.*

Proposition 7.3 *L'ensemble $\mathcal{S}$ formé de toutes les similitudes planes, directes et indirectes, muni de la la loi de composition des applications, est un groupe,* **le groupe des similitudes planes**.

Proposition 7.4 *Soit $t \in \mathbf{R}, r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbf{C}$. Alors*
- *L'application $z \mapsto \exp(it)z$ est* **la rotation** *de centre l'origine et d'angle t.*
- *L'application $z \mapsto rz$ est* **l'homothétie** *de centre l'origine et de rapport r.*
- *L'application $z \mapsto b + z$ est* **la translation** *de vecteur b.*
- *Si $t \notin 2\pi\mathbf{Z}$ alors l'application $z \mapsto b+\exp(it)z$ est la rotation de centre $\frac{b}{1-\exp(it)}$ et d'angle t.*
- *Si $r \neq 1$ alors l'application de $z \mapsto b + rz$ est l'homothétie de centre $\frac{b}{1-r}$ et de rapport r.*

Exemple 7.1 Les multiplications par i, j, $1+j$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ correspondent aux rotations d'angles $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$.

Proposition 7.5
- *La conjugaison $z \mapsto \overline{z}$ est* **la symétrie orthogonale** *(ou* **réflexion***) par rapport à $i\mathbf{R}$.*
- *Soit $t \in \mathbf{R}$, $r \in \mathbf{R}$ et $b = r\exp(i(\frac{t+\pi}{2}))$. L'application $z \mapsto b + \exp(it)\overline{z}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\frac{b}{2} + \mathbf{R}\exp(i\frac{t}{2})$.*

Proposition 7.6 *Soient $a = r\exp(it) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbf{C}$. Alors*
- *La similitude plane directe $z \mapsto b + az = f(z)$ est la composée de la rotation $z \mapsto \exp(it)z = g(z)$ avec l'homothétie $z \mapsto rz = h(z)$ et avec la translation $z \mapsto b+z = t(z)$: $f = t \circ (h \circ g)$. Elle conserve les angles orientés et dilate les distances dans le rapport r.*

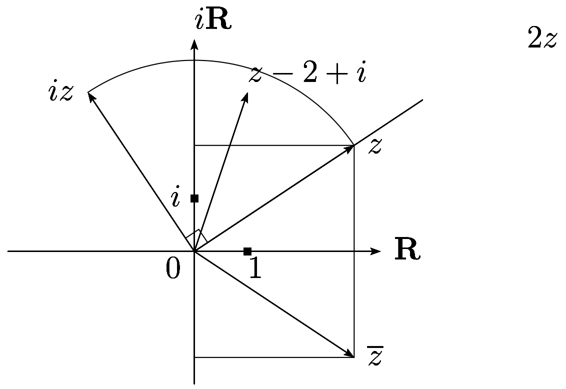


FIGURE 5 – $z, 2z, iz, z-2+i$ et $\overline{z}$

— *La similitude plane indirecte $z \mapsto b+a\overline{z} = f(z)$ est la composée de la symétrie orthogonale par rapport l'axe réel $z \mapsto \overline{z} = g(z)$ avec la similitude plane directe $z \mapsto b+az = h(z)$: $f = h \circ g$. Elle change l'orientation, conserve les angles géométriques et dilate les distances dans le rapport r.*

Proposition 7.7 — *Une similitude plane directe qui admet plus de deux points fixes est l'identité. Si elle admet un unique point fixe a elle est de la forme $z \mapsto a+r\exp(it)(z-a)$ avec $r > 0$. Si elle n'admet pas de point fixe c'est une translation.*

— *Une similitude plane indirecte qui possède au moins deux points fixes est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Elle est de la forme $z \mapsto a+\exp(it)\overline{z-a}$. Si elle admet un unique point fixe a elle est de la forme $z \mapsto a+r\exp(it)\overline{z-a}$ avec $r > 0$ et $r \neq 1$. Une similitude plane indirecte qui n'admet pas de point fixe est une* **symétrie glissée**. *Elle est de la forme $z \mapsto a + r\exp(i\frac{t}{2}) + \exp(it)\overline{z-a}$.*

Proposition 7.8 — *La composée $s_{a,t_2} \circ s_{a,t_1}$ des deux réflexions par rapport aux droites concourantes $a+\mathbf{R}\exp(it_1)$ et $a+\mathbf{R}\exp(it_2)$ est la rotation $z \mapsto a+\exp(2i(t_2-t_1))(z-a)$. La composée $s_{b,t} \circ s_{a,t}$ des deux réflexions par rapport aux droites parallèles $a+\mathbf{R}\exp(it)$ et $b+\mathbf{R}\exp(it)$ est la translation $z \mapsto \mathrm{Re}\left((b-a)\exp(-i(t-\frac{\pi}{2}))\right)\exp(i(t-\frac{\pi}{2}))+z$.*

— *La translation $z \mapsto r\exp(i\frac{t}{2})+z$ et la réflexion $z \mapsto a+\exp(it)\overline{z-a}$ commutent et leur composée est la symétrie glissée $z \mapsto a+r\exp(i\frac{t}{2})+\exp(it)\overline{z-a}$.*

8 Cocyclicité

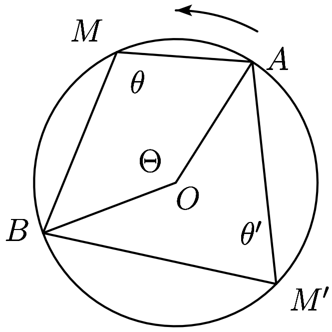
Proposition 8.1 *Soit $A = \exp(i\alpha), B = \exp(i\beta)$ et $M = \exp(i\mu)$ trois complexes distincts du cercle unité. Alors*

$$\frac{\exp(i\mu)-\exp(i\beta)}{\exp(i\mu)-\exp(i\alpha)} = \frac{\sin(\frac{\mu-\beta}{2})}{\sin(\frac{\mu-\alpha}{2})}\exp\left(i\frac{\beta-\alpha}{2}\right).$$

La version angulaire de cette proposition est le critère de cocyclicité suivant.

Proposition 8.2 *Soit $A = \exp(i\alpha), B = \exp(i\beta)$ et $M = \exp(i\mu)$ trois complexes distincts du cercle unité. Alors le double de la mesure θ de l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est indépendante du point M sur le cercle unité et est égale à la mesure Θ de l'angle orienté $(\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0B})$ c'est à dire $\beta-\alpha$.*

Cet énoncé admet lui même une version complexe :



$\Theta = 2\theta = 2\theta'$ modulo 2π

FIGURE 6 – Points cocycliques

Proposition 8.3 *Quatre points disnctincts A, B, C et D d'affixes a, b, c et d sont alignés ou sur un même cercle si et seulement si*

$$\frac{c-b}{c-a}\frac{d-a}{d-b} \in \mathbf{R}.$$

Proposition 8.4 *L'image d'une droite (respectivement d'un cercle) par une similitude est une droite (respectivement un cercle).*

Proposition 8.5 *Soient s, u, v, w quatre complexes tels que $sw - uv \neq 0$ et $v \neq 0$. Alors l'application $z \mapsto h(z) = \frac{sz+u}{vz+w}$ (appelée homographie) est une bijection de $\mathbf{C} \setminus \{-\frac{w}{v}\}$ sur $\mathbf{C} \setminus \{\frac{s}{v}\}$. De plus si a, b, c et d sont quatre complexes distincts et appartenant à $\mathbf{C} \setminus \{-\frac{w}{v}\}$ alors*

$$\frac{c-b}{c-a}\frac{d-a}{d-b} = \frac{h(c)-h(b)}{h(c)-h(a)}\frac{h(d)-h(a)}{h(d)-h(b)}$$

Proposition 8.6 *L'image d'un cercle ou d'une droite par une homographie est un cercle ou une droite.*

Deuxième partie

Fonctions et graphes

9 Introduction

Remarque 9.1 Nous ferons un usage élémentaire des notions d'*égalité*, d'*ensemble*, de *sous-ensemble*, d'*ensemble vide*, d'*élément*, d'*appartenance*, d'*inclusion*, d'*intersection,* de *réunion* et de *différence d'ensembles* ainsi que des symboles

$$=, \neq, \emptyset, \subset, \not\subset, \in, \notin, \cup, \cap, \setminus$$

qui leurs sont associés. Nous éviterons tant que possible le recours aux symboles $\forall$ et $\exists$ qui s'appellent respectivement **quantificateur universel** et **quantificateur existentiel** et se lisent respectivement *pour tout* et *il existe.*

Définition 9.1 Soient A et B deux ensembles. Une **fonction** (ou **application**) de A dans B est la donnée pour tout élément a de A d'un élément $b = f(a)$ de B appelé **valeur de** f **en** a. On note :

$$\begin{array}{ll} f : & A \to B \\ & a \mapsto f(a) = b. \end{array}$$

L'ensemble A s'appelle **domaine de** f, l'ensemble B s'appelle **l'ensemble d'arrivée** et le sous-ensemble

$$f(A) = \{b \in B | \exists a \in A, f(a) = b\}$$

de toutes les valeurs $f(a)$ obtenues lorsque a décrit A s'appelle **l'image de** f. Si $a \in A$ et $b \in B$ vérifient $b = f(a)$ alors b est appelé **image de** a **par** f et a est appelé **antécédent de** b **par** f. Si $b \in B$, le sous-ensemble de A formé de tous ses antécédents est noté $f^{-1}(b)$. Il est non vide si et seulement si b est un élément de $f(A)$

Exemples 9.1 Soit f la fonction dont le domaine est $A =]-1, 1[$, l'ensemble d'arrivée $B = \mathbf{R}$ et définie par la formule $f(x) = 2x^2$. Alors $f(]-1, 1[) = [0, 2[$ est différent de $\mathbf{R}$. On a $f^{-1}(\frac{2}{9}) = \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ alors que $f^{-1}(3) = \emptyset$ est l'ensemble vide.

Définition 9.2 Soient $f : A \to B$ et $A' \subset A$. La **restriction** $f_{|A'}$ de f à A' est la fonction de A' dans B définie par $f_{|A'}(x) = f(x)$ si $x \in A'$. Si la restriction de f à A' vérifie une propriété donnée on dit que f vérifie cette propriété sur A'. Soit A'' et B'' des ensembles contenant respectivement A et B et g une application de A'' dans B''. Si pour tout élément $x \in A$ on a $f(x) = g(x)$ on dit que g **prolonge** f **à** A'' ou que g **est un prolongement de** f **à** A''.

Exemple 9.2 Soit $A' = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, c, d\}$, $B' = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ et $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. On considère l'application $f : A \to B$ définie par

$$\begin{array}{rcl} f(a) & = & \alpha \\ f(b) & = & \beta \\ f(c) & = & \gamma \\ f(d) & = & \delta, \end{array}$$

l'application $i : A' \to B'$ définie par

$$\begin{array}{rcl} i(a) & = & \alpha \\ i(b) & = & \beta \\ i(c) & = & \gamma \\ i(d) & = & \delta \\ i(e) & = & \epsilon \end{array}$$

et l'application $j : A' \to B$ définie par

$$\begin{array}{rcl} j(a) & = & \alpha \\ j(b) & = & \beta \\ j(c) & = & \gamma \\ j(d) & = & \delta \\ j(e) & = & \delta. \end{array}$$

Les applications i et j sont deux prolongements différents de f à A'. L'application f est la restriction de j à A : $j_{|A} = f$. Bien que $i(x) = f(x)$ pour tout élément x de A, f n'est pas la restriction de i à A car f et i n'ont pas le même ensemble d'arrivée.

10 Composition de fonctions, injection, surjection, bijection, réciproque

Définition 10.1 Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont deux fonctions on appelle **composée de** f **par** g la fonction $g \circ f$ (on lit **g rond f**) la fonction de A dans C définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in A$.

Exemple 10.1 On considère les ensembles $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ et $C = \{1, 2, 3, 4\}$ et les applications $f : A \to B$ définie par

$$\begin{array}{rcl} f(a) & = & \alpha \\ f(b) & = & \beta \\ f(c) = f(d) & = & \delta \end{array}$$

et $g : B \to C$ définie par

$$\begin{array}{rcl} g(\alpha) & = & 1 \\ g(\beta) = g(\gamma) & = & 2 \\ g(\delta) = g(\epsilon) & = & 4. \end{array}$$

Alors la composée $g \circ f$ est l'application de A dans C définie par

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)(a) & = & 1 \\ (g \circ f)(b) & = & 2 \\ (g \circ f)(c) = (g \circ f)(d) & = & 4. \end{array}$$

Définition 10.2 On dit que $f : A \to B$ est **injective** si pour tous les x et x' de A distincts ($x \neq x'$) les images $f(x)$ et $f(x')$ sont distinctes ($f(x) \neq f(x')$), c'est à dire tout y de B possède au plus un antécédent.

Exemples 10.2 La fonction f de $\mathbf{R}$ dans $[0, +\infty)$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective car $f(1) = f(-1) = 1$. En revanche la fonction $g : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ est injective car si x et x' sont positifs ou nuls et $\sqrt{x} = \sqrt{x'}$ alors $x = \sqrt{x}^2 = \sqrt{x'}^2 = x'$. Sauf si le domaine est réduit au singleton $\{0\}$, une fonction paire n'est jamais injective.

Définition 10.3 On dit que $f : A \to B$ est **surjective** si $f(A) = B$ c'est à dire si tout y dans B possède au moins un antécédent.

Exemples 10.3 La fonction f de $\mathbf{R}$ dans $[0, +\infty)$ définie par $f(x) = 2x^2$ est surjective car pour tout réel positif ou nul y il existe un réel x tel que $x^2 = y$. En revanche la fonction $g : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ n'est pas surjective car un nombre strictement négatif n'est pas une racine carrée d'un réel.

Définition 10.4 On dit que $f : A \to B$ est **bijective** si elle est injective et surjective.

Remarque 10.1 La fonction $f : A \to B$ est bijective si et seulement si tout élément y de B admet un et un seul antécédent.

Exemple 10.4 La fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$ est bijective car elle est injective et surjective (injective car si $x \neq x'$ alors $2x + 1 \neq 2x' + 1$ et surjective car si $y \in \mathbf{R}$ alors $x = \frac{y-1}{2}$ est un antécédent de y.

Définition 10.5 Soit $f : A \to B$. On dit que $g : B \to A$ est la **réciproque de** f (ou **inverse de** f **pour la composition**) si pour tous les x de A et tous les y de B on a $(g \circ f)(x) = x$ et $(f \circ g)(y) = y$.

Proposition 10.1 *Soit $f : A \to B$. La fonction f possède une réciproque si et seulement si elle est bijective et alors cette réciproque est unique.*

Notation 10.1 On note f^{-1} la réciproque de f si elle existe.

Remarque 10.2 Si g est la réciproque de f alors f est la réciproque de g.

Exemple 10.5 La fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$ et la fonction g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $g(y) = \frac{y-1}{2}$ sont réciproques l'une de l'autre.

Exemples 10.6 Soit $A' = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$. On considère aussi les ensemble $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ et $D = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. L'application $f : A \to B$ définie par

$$\begin{aligned} f(a) &= \alpha \\ f(b) &= \beta \\ f(c) &= \gamma \\ f(d) &= \delta \end{aligned}$$

est injective mais elle n'est pas surjective. L'application $g : A \to C$ définie par

$$\begin{aligned} g(a) = g(b) &= \alpha \\ g(c) &= \beta \\ g(d) &= \gamma \end{aligned}$$

est surjective mais elle n'est pas injective L'application $h : A \to D$ définie par

$$\begin{aligned} h(a) &= \alpha \\ h(b) &= \beta \\ h(c) &= \gamma \\ h(d) &= \delta \end{aligned}$$

est bijective. Sa réciproque est l'application $h^{-1} : D \to A$ définie par

$$\begin{aligned} h^{-1}(\alpha) &= a \\ h^{-1}(\beta) &= b \\ h^{-1}(\gamma) &= c \\ h^{-1}(\delta) &= d. \end{aligned}$$

Définition 10.6 On dit de façon équivalente :
- f est injective et f est une **injection**,
- f est surjective et f est une **surjection**,
- f est bijective et f est une **bijection**.

11 Fonctions numériques

Définition 11.1 Une **fonction numérique** est une fonction à valeurs dans un sous-ensemble B **R**. Une **fonction numérique de la variable réelle** est une fonction numérique définie sur un sous-ensemble A de l'ensemble **R** des nombres réels.

Remarque 11.1 Souvent une fonction numérique d'une variable réelle est donnée par une formule sans précision de son domaine. Le premier travail à faire est alors de trouver le domaine le plus grand sur laquelle elle est définie. Par exemple la fonction donnée par $f(x) = \frac{1}{x}$ admet pour domaine $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ et la fonction donnée par $g(x) = \sqrt{x}$ admet pour domaine $[0, +\infty)$.

Définition 11.2 La fonction **valeur absolue** est la fonction $| \ | : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$.

Pour *visualiser* une fonction et ses propriétés on utilise son graphe.

Définition 11.3 Le graphe d'une fonction numérique de la variable réelle $f : A \to B$ est le sous-ensemble de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

$$\{(x, f(x)) | x \in A\}.$$

Exemples 11.1 Voici le graphe de la fonction f de $[-1, 1]$ dans **R** et définie par la formule $f(x) = \frac{|x|}{2}$.

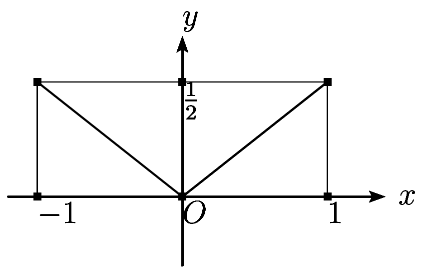


FIGURE 7 – Le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}|x|$

Définition 11.4 Si f et g sont deux fonctions numériques définies sur A et si $\lambda \in \mathbf{R}$ on définit **la somme** $f + g$, **le produit** λf **et le produit** fg par :

$$\text{si } \ x \in A, \ (f+g)(x) = f(x) + g(x), \ (\lambda f)(x) = \lambda(f(x)), \ (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Dans la suite on s'intéressera surtout à des fonctions numériques, et parmi ces fonctions, à celles de la variable réelle.

12 Les polynômes

Définition 12.1 On appelle **polynôme** une fonction P de **R** dans **R** pour laquelle il existe des réels en nombre fini $a_0, ..., a_d$ tels que si $x \in \mathbf{R}$ alors

$$P(x) = a_d x^d + ... + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k.$$

Les a_i s'appellent les **coefficients de** P. Si tous les a_i sont nuls le polynôme P est le **polynôme nul** et son **degré** est $-\infty$. Si au moins l'un des a_i est non nul, on appelle **degré** de P le plus grand indice i pour lequel a_i est non nul. Si seul a_d est non nul alors P est appelé **monôme de degré** d.

Proposition 12.1 *Si P et Q sont deux polynômes et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors $P+Q$, PQ et λP sont des polynômes.*

Notation 12.1 Le polynôme dont les coefficients sont $a_0, ..., a_d$ est noté $a_d x^d + ... + a_1 x + a_0$ ou $\sum_{k=0}^{d} a_k x^k$.

Remarque 12.1 Si $(a_0, ..., a_d)$ et $(b_0, ..., b_f)$ sont associés à un même polynôme avec $a_d \neq 0$ et $b_f \neq 0$ alors $d = f$ et pour tout i on a $a_i = b_i$: les coefficients sont égaux.

Exemples 12.1 Le polynôme $P = x^2 - 3x + 2$ est un polynôme de degré 2. Si $c \in \mathbf{R}$ la fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = c$ est un polynôme de degré 0 ou $-\infty$ appelée **fonction constante** c. Si $a, b \in \mathbf{R}$ la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ est un polynôme de degré au plus 1 appelée **fonction affine**. Si $b = 0$ on dit que f est **linéaire**.

Théorème 12.1 *Soit A et B deux polynômes avec B non nul. Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tels que $A = BQ + R$ et le degré de R est strictement inférieur à celui de B.*

Définition 12.2 Soient A, B, Q, R des polynômes tels que B non nul, $A = BQ + R$ et le degré de R est strictement inférieur à celui de B. On dit que Q est le **quotient de la division euclidienne de A par B** et que R est le **reste**. Le polynôme A est appelé le **dividende** et le polynôme B le **diviseur**.

Exemple 12.2 $3x + 2$ et $-x + 1$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $6x^3 + 4x^2 + 2x + 3$ par $2x^2 + 1$.

Proposition 12.2 *Soient $r \in \mathbf{R}$ et P un polynôme. Alors r est racine de P (i.e. $P(r) = 0$) si et seulement si le reste de la division euclidienne de P par $x - r$ est le polynôme nul.*

Exemple 12.3 On a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et 1 est racine de $x^2 - 1$.

Définition 12.3 Un nombre réel r est **racine** (**zéro**) d'une fonction f si $f(r) = 0$. Si f est un polynôme et si $m \in \mathbf{N}^*$ on dit que r est **racine** (**zéro**) **de multiplicité** m s'il existe un polynôme g tel que $f = (x - r)^m g$ et $g(r) \neq 0$.

Exemple 12.4 Soit $f = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Alors $f = (x+1)^2 g$ avec $g = x^2 + 1$. Or $g(-1) = 2$. Par conséquent -1 est racine de multiplicité 2 de f.

13 Fractions rationnelles

Définition 13.1 Soient f et g deux polynômes. Si g n'est pas le polynôme nul alors **la fraction rationnelle** $\frac{f}{g}$ est la fonction de $\mathbf{R} \setminus g^{-1}(0)$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemples 13.1 Le domaine de la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{3x+2}{x^2+4}$ est $\mathbf{R}$ alors que le domaine de la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{3x+2}{x^2-4}$ est $\mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.

14 Parité

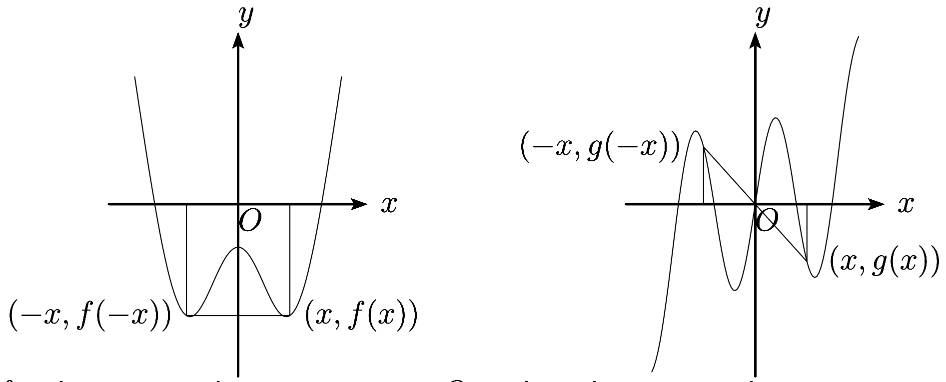
Définition 14.1 Une fonction $f : A \to B$ est dite **paire** (respectivement **impaire**) si pour tout $x \in A$ alors $-x \in A$ et $f(-x) = f(x)$ (respectivement $f(-x) = -f(x)$).

Proposition 14.1 *Soit $f : A \to B$ une fonction. On suppose que si $x \in A$ alors $-x \in A$. Alors il existe un unique couple (P, I) tel que $P : A \to \mathbf{R}$ est une fonction paire, $I : A \to \mathbf{R}$ est une fonction impaire et $f = P + I$. Si $x \in A$ alors $P(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $I(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.*

Exemple 14.1 La valeur absolue est une fonction paire.

Exemple 14.2 Un polynôme non nul est pair si et seulement s'il est somme de monômes de degré pair. Il est impair si et seulement si il est somme de monômes de degré impair.

Exemple 14.3 Si f et g sont deux polynômes non nuls alors la fraction rationnelle $\frac{f}{g}$ est paire si et seulement si f et g sont simultanément pairs ou simultanément impairs et elle est impaire si et seulement si f est pair pendant que g est impair ou que f est impair pendant que g est pair.



f paire : symetrie par rapport a Oy g impaire : symetrie par rapport a O

FIGURE 8 – Symétrie du graphe en fonction de la parité

15 Fonctions monotones

Définition 15.1 Soit $f : A \to B$. On dit que f est **croissante** si pour tous les x, x' de A tels que $x \leq x'$ on a $f(x) \leq f(x')$. On dit que f est **strictement croissante** si pour tous les x, x' de A tels que $x < x'$ on a $f(x) < f(x')$.

Définition 15.2 Soit $f : A \to B$. On dit que f est **décroissante** si pour tous les x, x' de A tels que $x \leq x'$ on a $f(x) \geq f(x')$. On dit que f est **strictement croissante** si pour tous les x, x' de A tels que $x < x'$ on a $f(x) > f(x')$.

Définition 15.3 Soit $f : A \to B$. On dit que f est **monotone** si elle est croissante ou si elle est décroissante. On dit qu'elle est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou si elle est strictement décroissante.

Exemples 15.1 Les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto 5 + x$, $x \mapsto -2 + 4x + x^3$ et la racine carrée $\sqrt{}$ sont croissantes ($x \mapsto 5 + x$, $x \mapsto -2 + 4x + x^3$ et $\sqrt{}$ sont même strictement croissantes). Les fonctions $x \mapsto 2$, $x \mapsto 4 - 5x^7$ sont décroissantes ($4 - 5x^7$ est même strictement décroissante). Les fonctions $x \mapsto x^2$, valeur absolue, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ne sont ni croissantes ni décroissantes.

Proposition 15.1 *Une fonction $f : A \to B$ qui est strictement monotone est injective.*

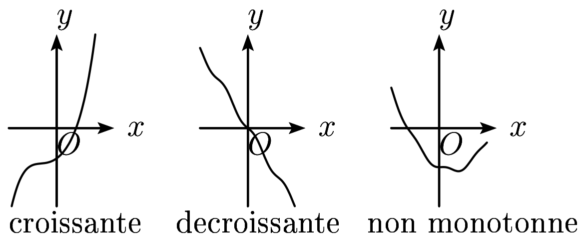


Figure 9 – Monotonie

16 Trigonométrie

Définition 16.1 Une fonction $f : A \to \mathbf{R}$ est dite **périodique** de **période** T si et seulement si pour tout $x \in A$ on a $x + T \in A$ et $f(x + T) = f(x)$.

Définition 16.2 On considère **un cercle de rayon 1**. Son périmètre vaut alors 2π (dire **deux pi**). On peut repérer les points de ce cercle par leurs coordonnées dans un repère orthonormé dont l'origine O est le centre du cercle. Les points du cercle sont les points dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Notons A le point de coordonnées $(1, 0)$. Parcourir le cercle dans **le sens positif ou trigonométrique** c'est le parcourir dans les sens anti-horaire. Si on part de A et qu'on parcourt sur le cercle la longueur t en tournant positivement on arrive au point $M(t)$ de coordonnées $x = \cos(t)$ (dire **cosinus** t) et $y = \sin(t)$ (dire **sinus** t). Si on tourne négativement en parcourant la longueur t on arrive au point M de coordonnées $x = \cos(-t)$ et $y = \sin(-t)$.

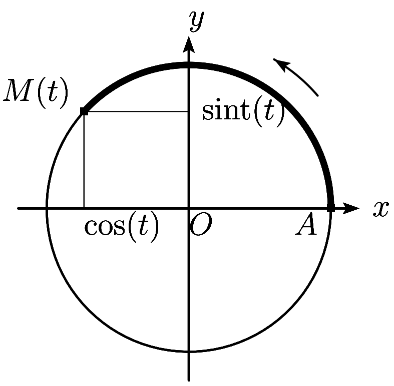


Figure 10 – Le cercle trigonométrique

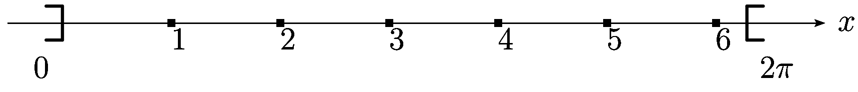


Figure 11 – Comparaison du périmètre d'un cercle de rayon 1 et de son rayon.

Proposition 16.1 *Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur* $\mathbf{R}$, *à valeurs dans* $[-1,1]$ *et vérifient*

$$\cos^2 + \sin^2 = 1.$$

Proposition 16.2 *La fonction cosinus est définie sur* $\mathbf{R}$, 2π*-périodique, paire, son image est le segment* $[-1,1]$. *Elle est strictement décroissante sur l'intervalle* $[0,\pi]$. *Si* $t \in \mathbf{R}$ $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$. *On a* $\cos(0) = 1, \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \cos(\pi) = -1$. *L'ensemble* $\cos^{-1}(0)$ *est égal à* $\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$.

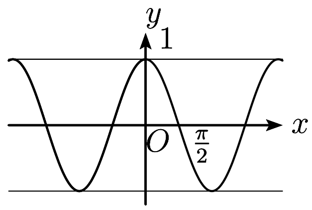


FIGURE 12 – Le graphe de cos

Proposition 16.3 *La fonction sinus est définie sur* $\mathbf{R}$, 2π*-périodique, impaire, son image est le segment* $[-1,1]$. *Elle est strictement croissante sur l'intervalle* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *Si* $t \in \mathbf{R}$ $\sin(t) = \cos(t - \frac{\pi}{2})$. *On a* $\sin(0) = 0, \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \sin(\pi) = 0$. *L'ensemble* $\sin^{-1}(0)$ *est égal à* $\{k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$.

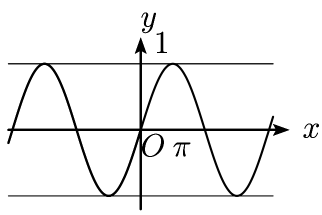


FIGURE 13 – Le graphe de sin

Proposition 16.4 *Pour tous les réels* t *et* s *on a*

$$\begin{aligned} \cos(t+s) &= \cos(t)\cos(s) - \sin(t)\sin(s) \\ \sin(t+s) &= \sin(t)\cos(s) + \cos(t)\sin(s). \end{aligned}$$

Définition 16.3 La fonction **tangente** est la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$ par

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}.$$

Proposition 16.5 *La fonction tangente est* π*-périodique, impaire, son image est* $\mathbf{R}$. *Elle est strictement croissante sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

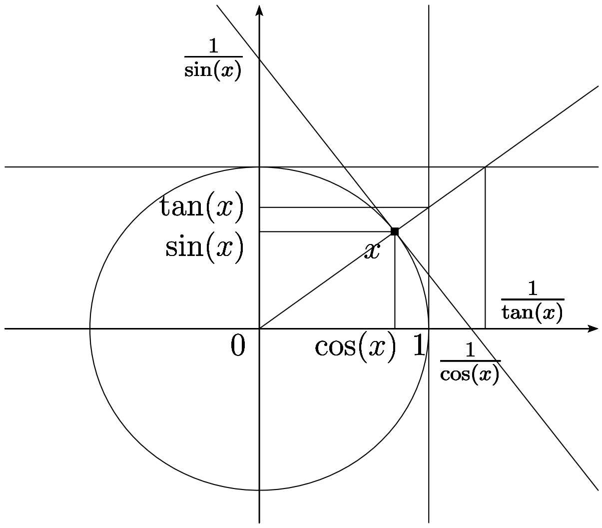


FIGURE 14 – $x, \cos(x), \sin(x), \tan(x), \frac{1}{\cos(x)}, \frac{1}{\sin(x)}$ et $\frac{1}{\tan(x)}$

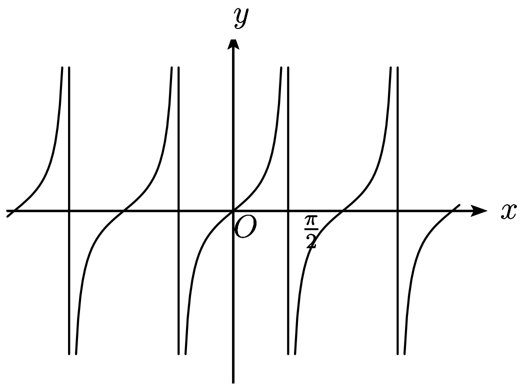


FIGURE 15 – Le graphe de tan

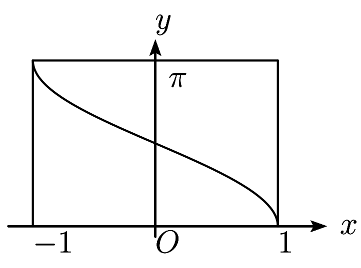


FIGURE 16 – Le graphe de arccos

Proposition 16.6 *Pour tous les réels t et s on a*

$$\tan(t+s) = \frac{\tan(t) + \tan(s)}{1 - \tan(t)\tan(s)}.$$

Définition 16.4 La fonction **arccosinus** est la fonction bijective et strictement décroissante de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$ définie par $y = \arccos(x)$ si $x = \cos(y)$.

Définition 16.5 La fonction **arcsinus** est la fonction bijective et strictement croissante de $[-1, 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ définie par $y = \arcsin(x)$ si $x = \sin(y)$.

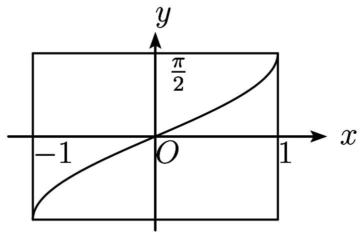


Figure 17 – Le graphe de arcsin

Proposition 16.7

$$\arcsin + \arccos = \frac{\pi}{2}.$$

Définition 16.6 La fonction **arctan** est la fonction bijective et strictement croissante de **R** dans
$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ définie par $y = \arctan(x)$ si $x = \tan(y)$.

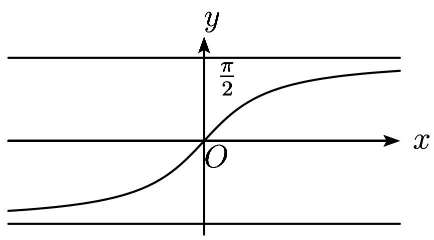


Figure 18 – Le graphe de arctan

17 Logarithme, exponentielle, trigonométrie hyperbolique

Définition 17.1 Intuitivement le **logarithme** (ou **logarithme neperien**) est la fonction de $]0, +\infty)$ dans **R** définie de la façon suivante. Si $x > 0$ alors $\ln(x)$ est l'aire (comptée algébriquement) de la zone délimitée par l'axe des abscisses le graphe de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, la droite verticale qui passe par le point $(1, 0)$ et la droite verticale qui passe par le point $(x, 0)$.

Proposition 17.1 *La fonction logarithme est une bijection strictement croissante de* $]0, +\infty)$ *dans* **R** *qui vérifie la propriété d'addition suivante. Si* x *et* y *appartiennent à* $]0, +\infty)$ *alors*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

En particulier

$$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x).$$

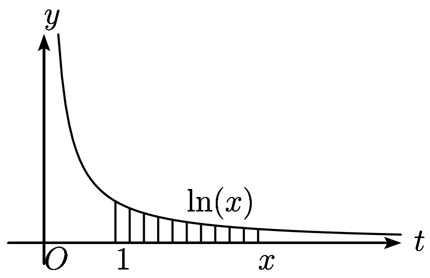


FIGURE 19 – Le graphe de $t \mapsto \frac{1}{t}$ et le logarithme

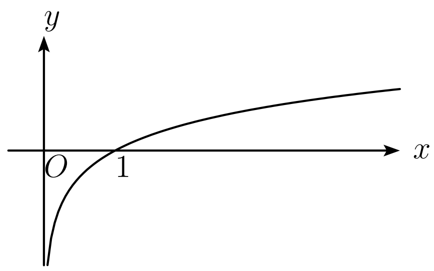


FIGURE 20 – Le graphe de ln

Définition 17.2 L'**exponentielle** est la fonction réciproque du logarithme. C'est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ dans $]0, +\infty)$ qui vérifie la propriété de multiplication suivante. Si x et y appartiennent à $\mathbf{R}$ alors

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

En particulier

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

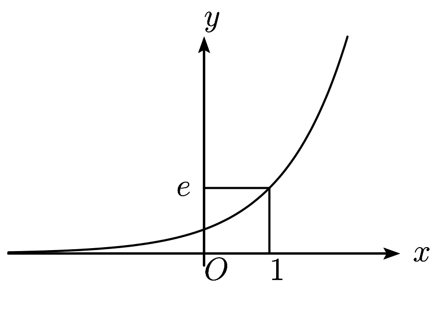


FIGURE 21 – Le graphe de exp

Définition 17.3 Si $x > 0$ et $y \in \mathbf{R}$ on définit x **puissance** y par $x^y = \exp(y \ln(x))$.

Proposition 17.2 *Soit $x, x' > 0$ et $y, y' \in \mathbf{R}$. On a*

$$(xx')^y = (x^y)(x'^y),\ \ x^{y+y'} = (x^y)(x^{y'}) \ \text{ et } \ (x^y)^{y'} = x^{yy'}.$$

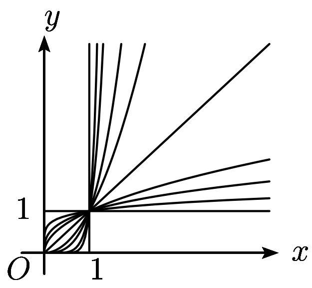


FIGURE 22 – Graphes de puissances

Notation 17.1 Si $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ on note $x^{\frac{1}{n}}$ parfois $\sqrt[n]{x}$.

Définition 17.4 Le **cosinus hyperbolique**, le **sinus hyperbolique** et la **tangente hyperbolique** sont les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies de la façon suivante. Si $x \in \mathbf{R}$ on pose

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}, \ \sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad \text{et} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Remarque 17.1 Puisque le cosinus hyperbolique est, comme l'exponentielle, strictement positif, le domaine de la tangente hyperbolique est $\mathbf{R}$.

Proposition 17.3 *Le cosinus hyperbolique est pair. Son image est* $[1, +\infty)$. *Il est strictement croissant sur* $[0, +\infty)$.

Proposition 17.4 *Le sinus hyperbolique est impair et c'est une bijection strictement croissante de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$.

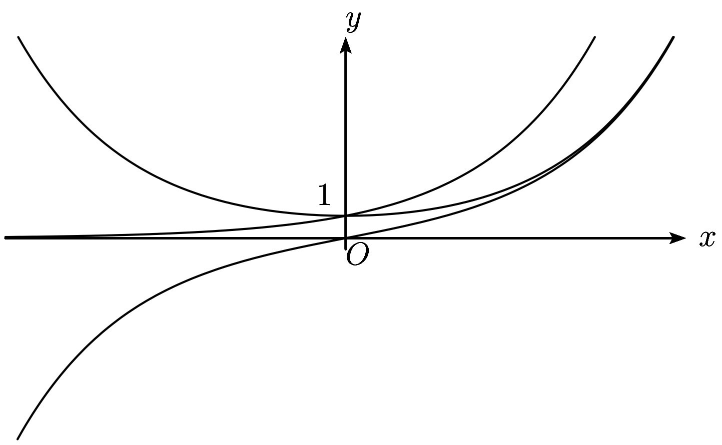


FIGURE 23 – Les graphes du cosinus hyperbolique, du sinus hyperbolique et de l'exponentielle

Proposition 17.5 *La tangente hyperbolique est impaire et c'est une bijection strictement croissante de* $\mathbf{R}$ *dans* $]-1, 1[$.

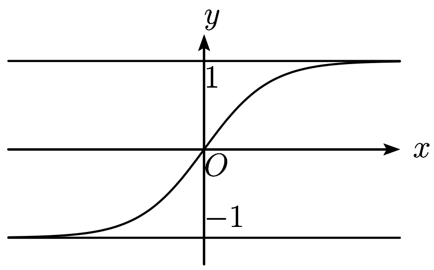


FIGURE 24 – Le graphe de tanh

Proposition 17.6 *Si $x, y \in \mathbf{R}$ alors*

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \cosh(x) + \sinh(x) \\
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\
\sinh(x+y) &= \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y).
\end{aligned}$$

Remarque 17.2 L'identité $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ permet de donner une interprétation graphique du cosinus hyperbolique et du sinus hyperbolique. La courbe déquation $u^2 - v^2 = 1,\ u > 0$ est une branche d'hyperbole qui admet comme paramétrisation bijective l'application $x \in \mathbf{R} \mapsto (\cosh(x), \sinh(x))$. L'aire délimitée par le segment d'extrémités $(0,0)$ et $(1,0)$, par le segment d'extrémités $(0,0)$ et $(\cosh(x), \sinh(x))$ et par l'arc d'hyperbole reliant $(0,0)$ et $(\cosh(x), \sinh(x))$ est $\frac{x}{2}$. Pour le montrer on se place dans le système de coordonnées orthogonales $U = \frac{(u-v)}{\sqrt{2}}$, $V = \frac{(u+v)}{\sqrt{2}}$. Dans ces coordonnées l'équation de l'hyperbole est $V = \frac{1}{2U}$, $U > 0$ et l'aire considérée est l'aire délimitée par le segment d'extrémités $(0,0)$ et $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, par le segment d'extrémités $(0,0)$ et $(\frac{\exp(t)}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\exp(t)})$ et par l'arc d'hyperbole reliant $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, et $(\frac{\exp(t)}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\exp(t)})$.

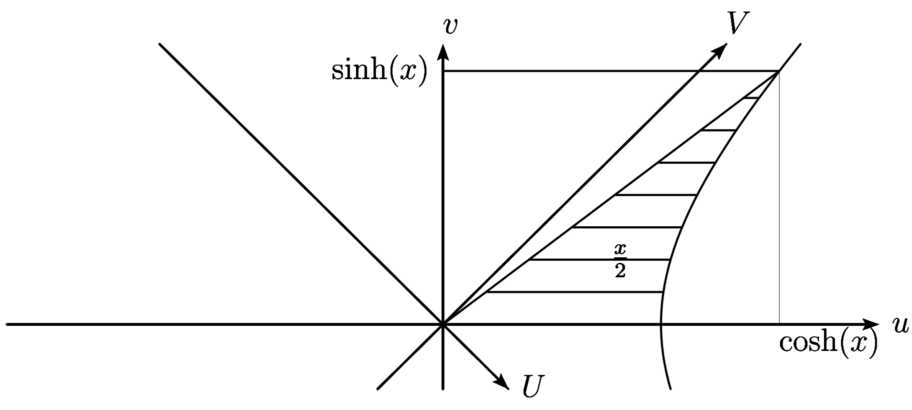


FIGURE 25 – x, $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$

Proposition 17.7 *Pour tous les réels t et s on a*

$$\tanh(t+s) = \frac{\tanh(t) + \tan(s)}{1 + \tan(t)\tan(s)}.$$

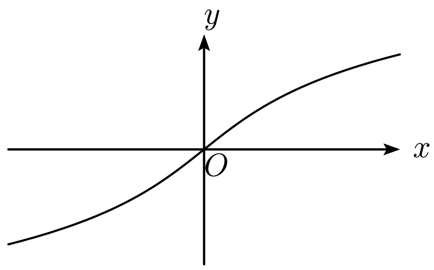


FIGURE 26 – Le graphe de argsh

Définition 17.5 La fonction **argsh** est la fonction bijective et strictement croissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $y = \operatorname{argsh}(x)$ si $x = \sinh(y)$.

Définition 17.6 La fonction **argch** est la fonction bijective et strictement croissante de $[1, +\infty)$ dans $[0, +\infty)$ définie par $y = \operatorname{argch}(x)$ si $x = \cosh(y)$.

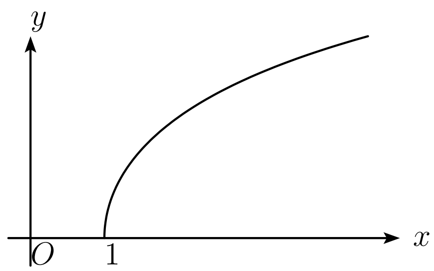


FIGURE 27 – Le graphe de argch

Définition 17.7 La fonction **argth** est la fonction bijective et strictement croissante de $]-1, 1[$ dans $\mathbf{R}$ définie par $y = \operatorname{argth}(x)$ si $x = \tanh(y)$.

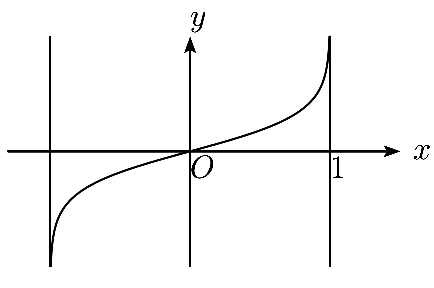


FIGURE 28 – Le graphe de argth

Proposition 17.8

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{argsh}(x) & = & \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ \operatorname{argch}(x) & = & \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \\ \operatorname{argth}(x) & = & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{array}$$

Troisième partie

Limites de fonctions, fonctions continues

18 Limite d'une suite

Définition 18.1 Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. On appelle **suite numérique débutant au rang** n_0 une application u définie sur $\{n \in \mathbf{N}; n \geq n_0\}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Remarque 18.1 Si $n_0 = 0$ on parle simplement de **suite numérique**.

Notation 18.1 On note $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ et si n est un entier naturel supérieur ou égal à n_0 alors u_n désigne l'image $u(n)$ de n par u et s'appelle **le n-ème terme de la suite u ou le terme d'indice** n.

Définition 18.2 Soit $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique débutant au rang n_0. Soit $l \in \mathbf{R}$. On dit que u **admet l comme limite** si u_n est arbitrairement proche de l lorsque n est arbitrairement grand.

Notation 18.2 L'écriture $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ signifie que u admet l comme limite.

Remarque 18.2 (culturelle) La phrase u_n *est arbitrairement proche de l lorsque n est arbitrairement grand* est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n le terme u_n appartient à I* :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, [(n \geq n_0 \text{ et } n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon)].$$

Exemples 18.1

— La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par la relation $u_n = \frac{1}{n}$ admet 0 comme limite. En effet si $\varepsilon > 0$ alors pour tout entier n supérieur ou égal à "1+la partie entière de $\frac{1}{\varepsilon}$" on a $|u_n - 0| < \varepsilon$.

— La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation $v_n = \frac{1}{2^n}$ admet 0 comme limite. En effet si $\varepsilon > 0$ alors pour tout entier n supérieur ou égal à "1+la partie entière de $\frac{1}{\varepsilon}$" on a $|v_n - 0| < \varepsilon$. Pour s'en convaincre il suffit d'observer que pour tout entier naturel n on a $n \leq 2^n$.

Proposition 18.1 *Si u admet une limite cette limite est unique.*

Définition 18.3 Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, u suite numérique débutant au rang n_0 et v une suite numérique débutant au rang n'_0. On définit les suites $u + v$, uv et λu en posant

$$(u + v)(n) = u(n) + v(n),\ (uv)(n) = u(n)v(n) \text{ et } (\lambda u)(n) = \lambda u(n)$$

si n est supérieur ou égal à n_0 et à n'_0. Si les termes de u sont tous non nuls alors on définit la suite $\frac{1}{u}$ en posant

$$(\frac{1}{u})(n) = \frac{1}{u(n)} \text{ si } n \geq n_0.$$

Proposition 18.2 *Si u et v admettent comme limites l et l' et si $\lambda \in \mathbf{R}$ alors les suites $u + v$, uv et λu admettent respectivement $l + l'$, ll' et λl comme limites. Si les termes de u sont tous non nuls et $l \neq 0$ alors $\frac{1}{u}$ admet $\frac{1}{l}$ comme limite.*

19 Limite finie, continuité

Définition 19.1 Soit $f : A \to \mathbf{R}$, soient a et l dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $]a, a+h[$ ou $]a-h, a[$ soit inclus dans A. On dit que f **possède une limite en a égale à l** si les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans $A \cap]a-h, a+h[$.

Notation 19.1 L'écriture $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ signifie que f possède une limite égale à l en a.

Remarque 19.1 (culturelle) La phrase *Les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans $A \cap]a-h, a+h[$* est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un intervalle ouvert non vide J contenant a et tel que l'image $f(J)$ soit incluse dans I* :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, [(|x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)].$$

Remarque 19.2 Dans certains cours on prend une définition différente de la limite en a. En particulier au lieu de prendre $x \in A \cap]a-h, a+h[$ comme ici, certains auteurs préfèrent prendre $x \in (A \cap (]a-h, a[\cup]a, a+h[))$ qui correspond dans notre texte à la définition ci-dessous de *possèder une limite en a quand x tend vers a en étant différent de a*. Le choix fait dans ce document permet d'avoir un énoncé simple du théorème de composition des limites.

Définition 19.2 Soit $f : A \to \mathbf{R}$, soient a et l dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que l'intervalle $]a, a+h[$ est inclus dans A. On dit que f **possède une limite à droite en a égale à l** si les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans $]a, a+h[$.

Notation 19.2 L'écriture $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$ signifie que f possède une limite à droite égale à l en a.

Remarque 19.3 (culturelle) La phrase *Les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans* $]a, a+h[$ est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un intervalle ouvert non vide J dont l'extrémité gauche est a et tel que l'image $f(J)$ soit incluse dans I.*

Remarque 19.4 La condition *Il existe $h > 0$ tel que l'intervalle $]a, a+h[$ est inclus dans A* est toujours vérifiée si a est dans A et A est un intervalle ouvert ou une réunion d'intervalles ouverts.

Remarque 19.5 On définit de façon analogue à la limite à droite la **limite à gauche** et l'écriture $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$ signifie que f possède une limite à gauche égale à l en a.

Définition 19.3 Soit $f : A \to \mathbf{R}$, soient a et l dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $]a, a+h[$ ou $]a-h, a[$ soit inclus dans A. On dit que f **possède une limite en a quand x tend vers a en étant différent de a égale à l** si les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans $A \cap (]a-h, a[\cup]a, a+h[)$.

Notation 19.3 L'écriture $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = l$ signifie que f possède une limite à égale à l quand x tend vers a en étant différent de a.

Proposition 19.1 *Si f possède une limite en a (respectivement une limite à gauche ou à droite) cette limite est unique.*

Remarque 19.6 Soit $f : A \to \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$ et $h > 0$ tel que $]a, a+h[\subset A$ (respectivement $]a-h, a[\subset A$). Si f possède une limite en a alors f possède une limite à droite (respectivement à gauche) et ces limites sont égales.

Remarque 19.7 Soit $f : A \to \mathbf{R}$ et soit $a \in A$. Si f possède une limite en a alors cette limite vaut $f(a)$.

Définition 19.4 Soient $f : A \to \mathbf{R}$ et $a \in A$. On dit que f est **continue en** a si f possède une limite en a. Dans ce cas nécessairement cette limite vaut $f(a)$.

Remarque 19.8 Ici, il est **important** que a appartienne à A.

Définition 19.5 On dit que $f : A \to \mathbf{R}$ est **continue** si pour tout a dans A f est continue en a.

Remarque 19.9 La fonction f est continue en a si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

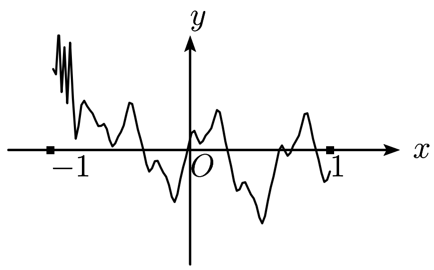


Figure 29 – graphe d'une fonction continue sur]01[

Remarque 19.10 (culturelle) La notion de continuité traduit (imparfaitement) le tracé du graphe de la fonction sans lever le stylo. En revanche la continuité en un point est une notion plus faible.

Exemple 19.1
- Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et soient f et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x$ et par $g(x) = \lambda$ si $x \in \mathbf{R}$. On vérifie facilement en utilisant la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un intervalle ouvert non vide J dont l'extrémité gauche est a et tel que l'image $f(J)$ soit incluse dans I* que si $a \in \mathbf{R}$ alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = a$ (prendre $J = I\cap]a, +\infty)$) et $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \lambda$ (prendre $J =]a, +\infty)$). On obtient de façon analogue le même résultat pour les limites à gauche. On en déduit que f et g sont continues.
- Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \neq 0$. Alors f est continue en x si $x \neq 0$ mais elle n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq 1 = f(0)$: les limites à gauche et à droite de f en 0 existent, sont égales mais diffèrent de $f(0)$.
- Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 2$ si $x > 0$. Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2 \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$: les limites à gauche et à droite de f en 0 existent mais sont différentes.
- Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors f n'a pas de limite à droite (ni à gauche) en 0.

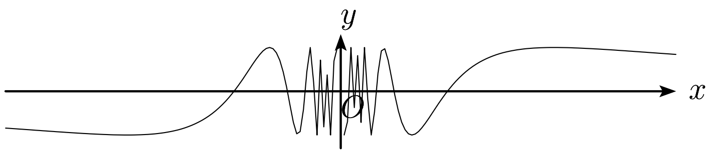


FIGURE 30 – Le graphe de $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$

20 Limites infinies vs limites à l'infini

On peut être intéressé au comportement d'une fonction lorsque la variable x devient arbitrairement grande positivement ou négativement. Pour cette raison on introduit les notions de limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

Définition 20.1 Soit $f : A \to \mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $A_0 \in A$ tel que $]A_0, +\infty) \subset A$. On dit que f **possède une limite en** $+\infty$ **égale à** l si les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement grand positivement.

Remarque 20.1 (culturelle) La phrase *Les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement grand positivement* est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un intervalle ouvert J du type $J =]\lambda, +\infty)$ avec $\lambda > 0$ dont l'image $f(J)$ est incluse dans I.*

Définition 20.2 Soit $f : A \to \mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $A_0 \in A$ tel que $(-\infty, A_0[\subset A$. On dit que f **possède une limite en** $-\infty$ **égale à** l si les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est négatif et sa valeur absolue est arbitrairement grande.

Notations 20.1 L'écriture $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ signifie que f possède une limite égale à l en $+\infty$. L'écriture $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ signifie que f possède une limite égale à l en $-\infty$.

Exemple 20.1 La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ vérifie $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

On souhaite aussi caractériser le comportement d'une fonction qui prend des valeurs $f(x)$ arbitrairement grandes à proximité d'un réel a.

Définition 20.3 Soit $f : A \to \mathbf{R}$ et soit a dans $\mathbf{R}$. On dit que $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est **la limite à droite de** f **en** a si les deux conditions suivantes sont vérifiées.
- Il existe $h > 0$ tel que l'intervalle $]a, a + h[$ est inclus dans A.
- Les valeurs $f(x)$ sont positives et arbitrairement grandes (respectivement négatives et de valeurs absolues arbitrairement grandes) lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans $]a, a + h[$.

Remarque 20.2 (culturelle) La phrase *Les valeurs $f(x)$ sont positives et arbitrairement grandes lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans* $]a, a+h[$ est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I de type* $]\lambda, +\infty)$ *avec* $\lambda > 0$ *il existe un intervalle ouvert non vide J dont l'extrémité gauche est a et dont l'image $f(J)$ est incluse dans I.*

On a des définitions analogues pour des limites à gauche égales à $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition 20.4 Si $a \notin A$, on dit que $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est **la limite de** f **en** a si c'est à la fois la limite à droite et la limite à gauche de f en a.

Exemple 20.2 La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ vérifie $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$. Cette fonction n'a donc pas de limite en 0 car elle a des limites à droite et à gauche en 0 qui sont différentes.

Notation 20.2 On utilise suivant les cas les notations suivantes : $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Enfin on caractérise le comportement d'une fonction qui prend des valeurs $f(x)$ arbitrairement grandes pour des x arbitrairement grands.

Définition 20.5 Soit $f : A \to \mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $A_0 \in A$ tel que $]A_0, +\infty) \subset A$. On dit que $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est **limite de f en $+\infty$** si les valeurs $f(x)$ sont positives et arbitrairement grandes (respectivement négatives et de valeurs absolues arbitrairement grandes) lorsque x est positif et arbitrairement grand.

On a des définitions analogues pour des limites infinies en $-\infty$.

Notation 20.3 On utilise suivant les cas les notations suivantes : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple 20.3 La fonction définie par $f(x) = x^3$ vérifie $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ alors que la fonction définie par $g(x) = x^2$ vérifie $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Remarque 20.3 Qu'elle soit finie ou infinie, la limite en $a \in \mathbf{R}$ ou en $+\infty$ ou $-\infty$ est toujours unique.

21 Règles algébriques

Proposition 21.1 *Soit f et g deux fonctions numériques de la variable réelle, $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l, l' \in \mathbf{R}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} f(x) = l'$. Alors*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) + g(x) &= l + l' \\ \lim_{x \to a} f(x)g(x) &= ll' \\ \textbf{si} \ \ l' \neq 0, \ \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{l}{l'} \end{aligned}$$

Proposition 21.2 *Soit f une fonction numériques, $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ **et si f est strictement positive** *alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ **et si f est strictement négative** *alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Proposition 21.3 *Soit f et g deux fonctions numériques, $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l \in \mathbf{R}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$. Alors*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} -g(x) &= -\infty \\
\lim_{x \to a} f(x) + g(x) &= +\infty \\
\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= 0 \\
\textbf{si} \quad l > 0, \ \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} &= +\infty \\
\textbf{si} \quad l < 0, \ \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} &= -\infty
\end{aligned}$$

Proposition 21.4 *Soit f et g deux fonctions numériques, $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l \in \mathbf{R}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$. Alors*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} -g(x) &= +\infty \\
\lim_{x \to a} f(x) + g(x) &= -\infty \\
\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= 0 \\
\textbf{si} \quad l > 0, \ \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} &= -\infty \\
\textbf{si} \quad l < 0, \ \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} &= +\infty
\end{aligned}$$

Proposition 21.5 *Soit f et g deux fonctions numériques et $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$. Alors*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) + g(x) &= +\infty \\
\lim_{x \to a} f(x)g(x) &= +\infty.
\end{aligned}$$

Proposition 21.6 *Soit f et g deux fonctions numériques et $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$. Alors*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) + g(x) &= -\infty \\
\lim_{x \to a} f(x)g(x) &= +\infty.
\end{aligned}$$

Proposition 21.7 *Soit f et g deux fonctions numériques et $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$. Alors*

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = -\infty.$$

Remarques 21.1 Ces propositions donnent la liste exhaustive de toutes les situations où on déduit les limites de $f + g$, fg ou $\frac{f}{g}$ en a de la seule connaissance des limites de f et g en a. Les situations non envisagées s'appellent **les formes indéterminées**. Dans **tous ces autres cas** $f + g$, fg ou $\frac{f}{g}$ n'ont pas nécessairement de limites en a et la preuve de l'existence éventuelle de limites nécessite de développer une argumentation.

22 Composition

Proposition 22.1 *Soient $f : A \to \mathbf{R}$ $g : B \to \mathbf{R}$ deux fonctions telles que $f(A)$ soit inclus dans B. Soient $a, b, l \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = l$.*

Remarque 22.1 La simplicité de cet énoncé résulte du choix qu'on a fait de la définition de limite.

Proposition 22.2 *Si $f : A \to \mathbf{B}$ et $g : B \to \mathbf{R}$ sont continues alors $g \circ f : A \to \mathbf{R}$ est continue.*

23 Comparaison

Proposition 23.1 *Soient f, g et h trois fonctions numériques définies sur un sous ensemble A de $\mathbf{R}$ et soient a dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et l dans $\mathbf{R}$. On suppose que si $x \in A$ alors $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. On suppose aussi que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$. Alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.*

Proposition 23.2 *Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un sous ensemble A de $\mathbf{R}$ et soit a dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que si $x \in A$ alors $f(x) \leq g(x)$. On suppose aussi que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$. Alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.*

Exemple 23.1 On admet que si $x > 0$ alors $\sin(x) < x$. De plus si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, l'inégalité triangulaire appliquée à un triangle rectangle d'hypothénuse 1 et dont les longueurs des deux autres côtés sont $\sin(x)$ et $\cos(x)$ implique que $1 - \cos(x) < \sin(x)$ et donc $1 - \cos(x) < x$. On déduit de ces inégalités, de la continuité de $x \mapsto x$, du théorème de comparaison et de la parité que les fonctions sinus et cosinus sont continues en 0.

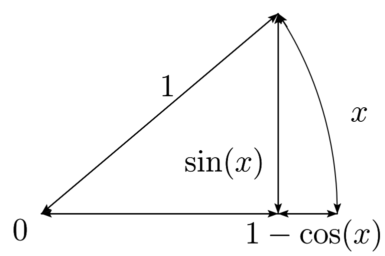


FIGURE 31 – $\sin(x) < x$ et $1 - \cos(x) < \sin(x) < x$

24 Continuité des fonctions classiques

Proposition 24.1 *Les polynômes, les fonctions rationnelles, la valeur absolue, les fonctions* cos, sin, tan, arccos, arcsin, arctan, ln, exp, cosh, sinh, tanh, argch, argsh *et* argth *sont continues sur leurs domaines respectifs.*

25 Quelques limites classiques

Proposition 25.1 *Si* $n \in \mathbf{N}^*$ *alors*

$$\begin{array}{llll} \lim_{x\to+\infty} x^n & = +\infty & \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} & = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} & = +\infty & \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} & = -\infty \text{ si } n \text{ impair} \\ & & \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} & = +\infty \text{ si } n \text{ pair.} \end{array}$$

Cette proposition permet de calculer des limites des fonctions rationnelles.

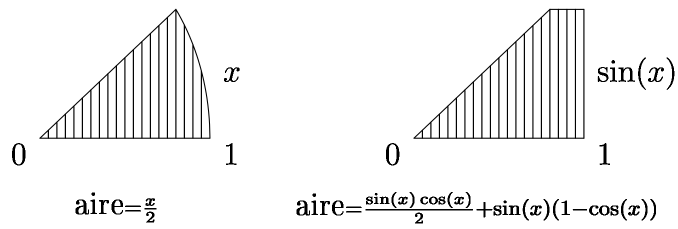


FIGURE 32 – $\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + \sin(x)(1-\cos(x))$

Proposition 25.2 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$

Proposition 25.3

$$\begin{array}{llll} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) & = +\infty & \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) & = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) & = \frac{\pi}{2} & \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) & = -\frac{\pi}{2} \end{array}$$

Proposition 25.4 *Si* $x > 0$ *alors* $\ln(1+x) < x$.

On déduit de cette proposition et des résultats de composition et de comparaison précédents quelques limites classiques relatives aux fonctions de la trigonométrie hyperboliques.

Proposition 25.5

$$\begin{array}{llll} \lim_{x\to+\infty} \exp(x) & = +\infty & \lim_{x\to-\infty} \exp(x) & = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \ln(x) & = +\infty & \lim_{x\to 0^+} \ln(x) & = -\infty \end{array}$$

Proposition 25.6 *Si* $\lambda > 0$,

$$\begin{array}{llll} \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^\lambda} & = +\infty & \lim_{x\to-\infty} |x|^\lambda \exp(x) & = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\lambda} & = 0 & \lim_{x\to 0^+} x^\lambda \ln(x) & = 0. \end{array}$$

Proposition 25.7

$$\begin{array}{llll} \lim_{x\to+\infty} \cosh(x) & = +\infty & \lim_{x\to-\infty} \cosh(x) & = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \sinh(x) & = +\infty & \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) & = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \tanh(x) & = 1 & \lim_{x\to-\infty} \tanh(x) & = -1 \end{array}$$

Proposition 25.8

$$\begin{array}{llll}
\lim_{x\to+\infty} \operatorname{argch}(x) & = +\infty & \lim_{x\to 1^+} \operatorname{argch}(x) & = 0 \\
\lim_{x\to+\infty} \operatorname{argsh}(x) & = +\infty & \lim_{x\to-\infty} \operatorname{argsh}(x) & = -\infty \\
\lim_{x\to 1^-} \operatorname{argth}(x) & = +\infty & \lim_{x\to-1^+} \operatorname{argth}(x) & = -\infty
\end{array}$$

26 Asymptotes

Définition 26.1 Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$) on dit que f **admet comme direction asymptotique en** $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) la direction $y = \alpha x$ (ou $x = 0$ si $\alpha \in \{-\infty, +\infty\}$).

Définition 26.2 Si $|\lim_{x\to a^+} f(x)| = +\infty$ et si $|\lim_{x\to a^-} f(x)| = +\infty$ on dit que la droite verticale d'équation $x = a$ est **asymptote au graphe de** f.

Définition 26.3 Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (\alpha x + \beta) = 0$ on dit que la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est **asymptote au graphe de** f **en** $+\infty$. Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (\alpha x + \beta) = 0$ on dit que la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est **asymptote au graphe de** f **en** $-\infty$.

Proposition 26.1 *Si la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) alors f admet comme direction asymptotique en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) la direction $y = \alpha x$.*

Exemple 26.1 La fonction donnée par $f(x) = \ln(x)$ admet la direction asymptotique la droite d'équation $y = 0$ en $+\infty$ mais n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

Remarque 26.1 Si la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ et si $f(x) - (\alpha x + \beta)$ est positif (respectivement négatif) pour x arbitrairement grand alors le graphe de f est **au dessus** (respectivement **au dessous**) de cette droite en $+\infty$.

Exemple 26.2 Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2 - x}{\sqrt{1 + x^2}}$. Alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale au graphe de f en 0, la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ alors que la droite d'équation $y = -x + 1$ est asymptote au graphe de f en $-\infty$.

27 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 27.1 *(***Théorème des valeurs intermédiaires***) Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I et soit a et b dans I. Alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un c compris entre a et b tel que $f(c) = \lambda$.*

Exemple 27.1 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ alors il existe a et b tels que $f(a) < 0 < f(b)$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c tel que $f(c) = 0$.

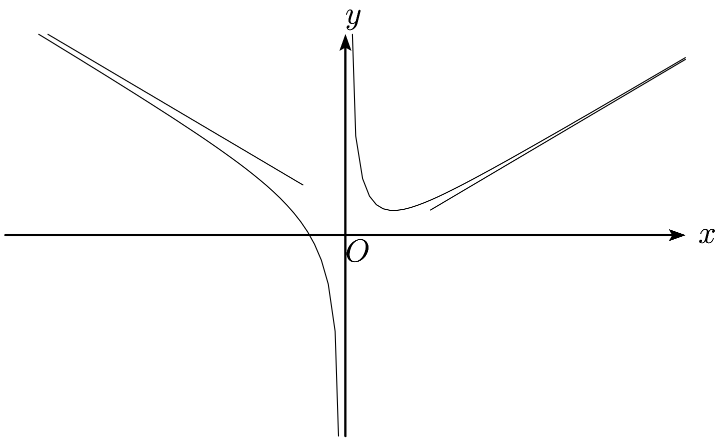


FIGURE 33 – Le graphe de $x \mapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{1+x^2}}$ et ses asymptotes

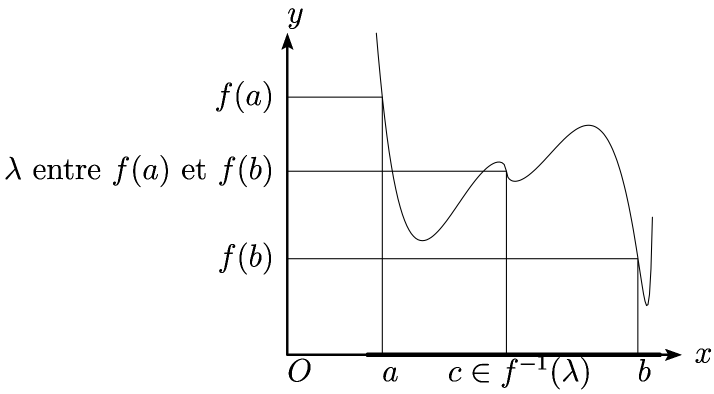


FIGURE 34 – Les valeurs intermédiaires

28 Prolongement par continuité

Définition 28.1 Soit $f : A \to \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R} \setminus A$. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $]a-h, a[$ et $]a, a+h[$ soient inclus dans A. S'il existe $l \in \mathbf{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ alors on appelle **prolongement par continuité de** f **en** a la fonction g définie sur $A \cup \{a\}$ par $g(a) = l$ et si $x \in A$, $g(x) = f(x)$. La fonction g est continue en a.

Exemple 28.1 La fonction définie par $g(0) = 1$ et $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$ est le prolongement par continuité en 0 de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.

Exemple 28.2 La fonction définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ est le prolongement par continuité en 0 de $x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$.

29 Monotonie et continuité, existence de réciproque

On déduit du théorème des valeurs intermédiaires la proposition suivante.

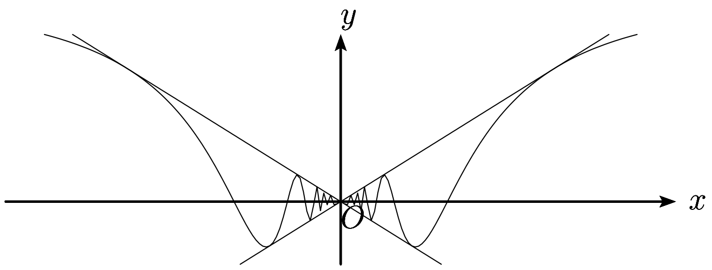


FIGURE 35 – Les graphes de $x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$, $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto -|x|$

Proposition 29.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et continue. La fonction f est une bijection de I sur $f(I)$ si et seulement si f est strictement monotone. Si c'est une bijection, alors sa réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est aussi continue.*

Remarque 29.1 Les hypothèses f **continue** et I **intervalle** sont indispensables pour conclure.

Le théoèrme des valeurs intermédiaires permet aussi de caractériser, parmi les fonctions strictement monotones, les fonctions continues.

Proposition 29.2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et strictement monotone. La fonction f est continue si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.*

30 Image d'un segment par une fonction continue

Proposition 30.1 *Soit $f : A \to \mathbf{R}$ continue et $[a,b]$ un segment inclus dans A. Alors $f([a,b])$ est un segment. Plus précisément, il existe $\alpha, \beta \in [a,b]$ tels que $f([a,b]) = [f(\alpha), f(\beta)]$.*

Remarque 30.1 Les nombres α et β sont en général différents de a et b. Par exemple si f est définie par $f(x) = x(x^2-1)$ alors $f([-1,1]) = [-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}] = [f(-\frac{1}{\sqrt{3}}), f(\frac{1}{\sqrt{3})})]$ alors que $f(-1) = f(1) = 0$.

Quatrième partie

Dérivation d'une fonction

31 Dérivée en un point, dérivée

Définition 31.1 Soient $f : A \to \mathbf{R}$ et $a \in A$. On dit que f est **dérivable en** a si le **taux d'accroissement entre** x **et** a

$$x \in A \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie quand x tend vers a. Si f est dérivable en a on appelle **dérivée de** f **en** a et on note $f'(a)$ la limite du taux d'accroissement :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Si f est dérivable en tout point de A on dit que f est **dérivable** et la fonction f' ainsi définie sur A s'appelle **la dérivée de** f.

La dérivée d'une fonction f en un point a permet de donner une **approximation affine** de la fonction f quand x est proche de a.

Proposition 31.1 *Si f est dérivable en a alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))}{(x - a)} = 0.$$

Définition 31.2 Si f est dérivable en a la fonction affine $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ s'appelle **l'approximation affine de** f **en** a**.**

Proposition 31.2 *Si f est dérivable en a et si $(\alpha, \beta) \neq (f(a), f'(a))$ alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))}{f(x) - (\alpha + \beta(x - a))} = 0.$$

Remarque 31.1 Cette proposition explique pourquoi la fonction affine $x \mapsto f(a)+f'(a)(x-a)$ s'appelle approximation affine de f en a.

La dérivée et le taux d'accroissement admettent l'interprétation cinématique suivante. Si $f(x)$ représente une position en fonction du temps x alors le taux d'accroissement entre x et a est *la vitesse moyenne* entre les temps a et x alors que la dérivée $f'(a)$ est *la vitesse instantannée* au temps a.

Exemples 31.1
- Les fonctions constantes sont dérivables de dérivée la fonction nulle.
- La fonction $x \mapsto ax$ est dérivable de dérivée la fonction constante a.
- La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable de dérivée la fonction $x \mapsto 2x$.
- La valeur absolue n'est pas dérivable en 0.
- L'égalité $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ signifie que le sinus est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.

Proposition 31.3 *Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*

Définition 31.3 Si f est dérivable et si f' est dérivable en a alors $(f')'(a)$ est notée $f''(a)$ et s'appelle **dérivée seconde** de f en a. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Si on peut dériver n fois la fonction f on dit que f est n **fois dérivable** et on note $f' = f^{(1)}, f'' = f^{(2)}, f''' = f^{(3)}, ..., f^{(n)}$ les dérivées successives. La fonction $f^{(n)}$ s'appelle **dérivée** n**-ème** de f.

Remarque 31.2 En cinématique, la dérivée seconde s'appelle **accélération**.

Notation 31.1 Les dérivées $f' = f^{(1)}, f'' = f^{(2)}, f''' = f^{(3)}, ..., f^{(n)}$ sont aussi notées

$$\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^3f}{dx^3}, ..., \frac{d^nf}{dx^n}.$$

En appliquant la proposition précédente aux dérivées successives de f on obtient

Proposition 31.4 *Si f est n fois dérivable alors $f, f', ..., f^{(n-1)}$ sont continues.*

32 Droite tangente au graphe d'une fonction en un point

Définition 32.1 Si f est une fonction définie sur un intervalle qui contient les deux points a et b on appelle **sécante au graphe de** f **qui passe par** $(a, f(a))$ **et** $(b, f(b))$ la droite qui passe par ces deux points. C'est la droite d'équation

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Définition 32.2 Si f est une fonction dérivable en a on appelle **droite tangente au graphe de** f **en** $(a, f(a))$ la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

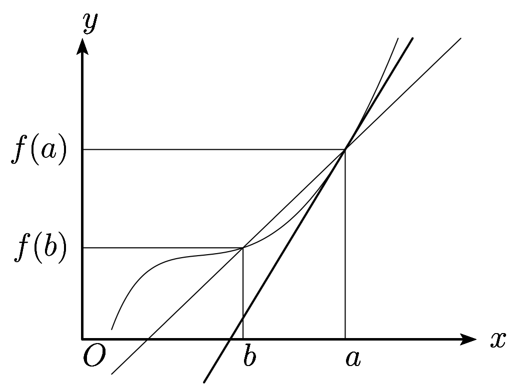


FIGURE 36 – Tangente en $(a, f(a))$ et sécante au graphe de f entre les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$

La droite tangente est en un *certain sens* la limite des sécantes qui passent par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ lorsque b tend vers a. C'est aussi, parmi les droites qui passent par $(a, f(a))$ celle qui *s'approche le plus* du graphe de f.

33 Règles algébriques

Proposition 33.1 *Soient f et g deux fonctions définies sur A et $a \in A$. On suppose que f et g sont dérivables en a de dérivées $f'(a)$ et $g'(a)$. Alors*

- *la fonction $f+g$ est dérivable en a et*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

- *la fonction fg est dérivable en a et*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \text{ (\textbf{Règle de Leibniz})},$$

- *si g ne s'annule pas la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

On déduit de ces règles le calcul de la dérivée d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle.

Proposition 33.2 *Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. La dérivée du polynôme*

$$P = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$$

est le polynôme

$$P' = n a_n x^{n-1} + ... + a_1.$$

Proposition 33.3 *La dérivée de la fraction rationnelle*

$$R = \frac{P}{Q}$$

est la fraction rationnelle

$$R' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

Exemple 33.1 Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. La dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est la fonction $x \mapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

34 Dérivée d'une composée et dérivabilité de la réciproque

Proposition 34.1 *Soient $f : A \to B$ et $g : B \to \mathbf{R}$ deux fonctions et $a \in \mathbf{R}$. Si f est dérivable en a et g en $f(a)$ alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Exemple 34.1 Si $n \in \mathbf{N}$, la dérivée de la fonction $x \mapsto (1+x^2)^n$ est la fonction $x \mapsto 2nx(1+x^2)^{n-1}$.

Remarque 34.1 On déduit de cette proposition que la réciproque d'une fonction dérivable dont la dérivée s'annule n'est pas dérivable. La proposition suivante indique que c'est la seule obstruction.

Proposition 34.2 *Soit $f : A \to B$ une fonction dérivable et bijective. On suppose que $f'(x) \neq 0$ en tout point $x \in A$. Alors la fonction réciproque de f, $f^{-1} : B \to A$, est dérivable et*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \text{ si } y \in B.$$

Exemples 34.2 Si $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$ alors la fonction définie de $]0, +\infty)$ dans $]0, +\infty)$ par $f(x) = x^n$ est une bijection dérivable et sa dérivée ne s'annule pas. Par conséquent, sa réciproque, la fonction $y \mapsto \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ est dérivable et si $y \in]0, +\infty)$ alors

$$(y^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Par le résultat de dérivation des composées on déduit alors que si $r \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ alors la fonction définie de $]0, +\infty)$ dans $]0, +\infty)$ par $f(x) = x^r$ est dérivable et si $x \in]0, +\infty)$ alors

$$(x^r)' = ry^{r-1}.$$

35 Quelques exemples classiques

Proposition 35.1 *Les fonctions* sin, cos, tan, arcsin, arccos, *et* arctan *sont dérivables et*

$$\begin{array}{ccc} \sin' = \cos & \cos' = -sin & \tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 \\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{array}.$$

Proposition 35.2 *Les fonctions* ln *et* exp *sont dérivables et*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \exp' = \exp.$$

Proposition 35.3 *Si $\lambda \in \mathbf{R}$ alors la fonction définie de $]0, +\infty)$ dans $]0, +\infty)$ par $f(x) = x^\lambda$ est dérivable et*

$$(x^\lambda)' = \lambda y^{\lambda-1}.$$

Proposition 35.4 *Les fonctions* sinh, cosh, tanh, argsh, argch, argth *sont dérivables et*

$$\begin{array}{ccc} \sinh' = \cosh & \cosh' = \sinh & \tanh' = \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2 \\ \mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \mathrm{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \end{array}.$$

36 Théorème des accroissements finis

Théorème 36.1 *(***Théorème des accroissements finis***) Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soient $a < b$ deux points de I. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Remarque 36.1 La conclusion reste vraie en supposant seulement f *continue sur I et dérivable sur $]a, b[$.*

Ce théorème admet l'interprétation géométrique suivante. La sécante au graphe d'une fonction dérivable f entre deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est parallèle à une tangente en un point *intermédiaire* $(c, f(c))$.

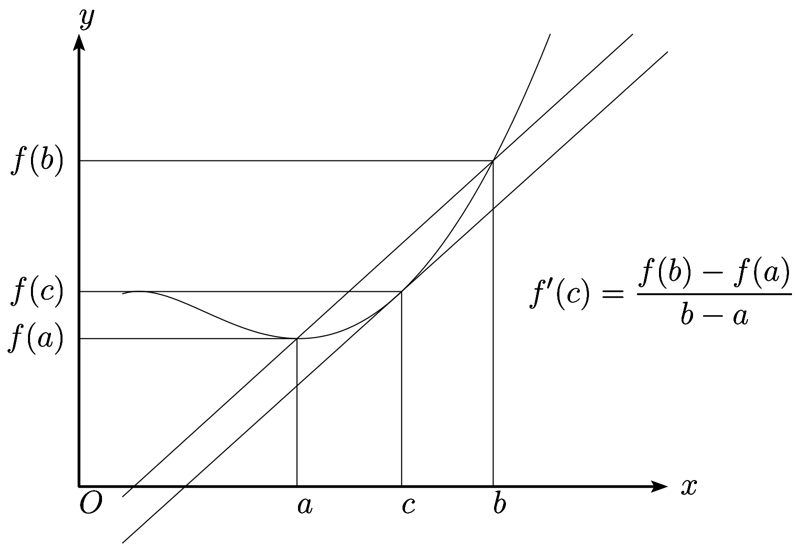


Figure 37 – Sécante entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et tangente en $(c, f(c))$ parallèles

Exemple 36.1 La fonction définie sur $]0, +\infty)$ par $f(x) = (\exp(x-2)-1)\ln(x)$ est dérivable et s'annule en 1 et en 2. Par conséquent, il existe c entre 1 et 2 tel que $f'(c) = 0$.

Ce théorème admet l'interprétation cinématique suivante. Lors d'un mouvement la vitesse moyenne entre les temps a et b coïncide au moins une fois avec la vitesse instantanée entre a et b.

Proposition 36.1 *Soit f dérivable. Si f est croissante (respectivement décroissante) alors f' est positive (respectivement négative).*

Proposition 36.2 *Soit f définie sur un intervalle I et dérivable. Si f' est strictement positive (respectivement strictement négative) alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).*

Remarque 36.2 Ces deux propositions ne sont pas réciproques l'une de l'autre. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable, strictement croissante et sa dérivée s'annule en 0. Dans le second cas il est important de supposer que le domaine est un intervalle. Par exemple la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ n'est pas décroissante alors que sa dérivée est strictement négative.

Remarque 36.3 Il découle de ces propositions que les variations d'une fonction dérivable se déduisent du signe de sa dérivée.

Proposition 36.3 *Soit I un intervalle, $a \in I$ et f continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim_{x\to a} f'(x)$ existe et est finie alors f est dérivable en a et*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

37 Extrema, points stationnaires, points d'inflexion, convexité et concavité

Définition 37.1 Soit $f : A \to \mathbf{R}$ dérivable en a. On dit que a est un **point stationnaire** si $f'(a) = 0$.

Définition 37.2 Soit $f : A \to \mathbf{R}$. On dit que f admet un **maximum global** en a (respectivement **minimum global**) si $f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$) pour tout $x \in A$.

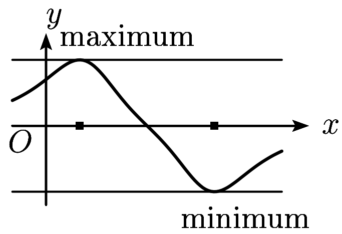


Figure 38 – Maximum et minimun globaux

Définition 37.3 Soit $f : A \to \mathbf{R}$. On dit que f admet un **maximum local** en a (respectivement **minimum local**) s'il existe un intervalle I ouvert qui contient a tel que $f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$) pour tout $x \in I \cap A$.

Définition 37.4 On dit que f admet un **extremum global** (respectivement **local**) en a si elle admet un maximum ou un mininum global (respectivement local) en ce point .

Exemple 37.1 Soit f la fonction définie sur $[-2, +\infty)$ par $f(x) = x^3 - 3x$. Alors f admet un minimum global en -2 et 1 et elle admet en -1 un maximum local qui n'est pas un maximum global. La fonction f ne possède pas de maximum global.

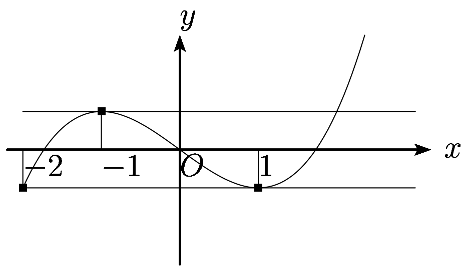


Figure 39 – Extrema

Proposition 37.1 *Soit $f : A \to \mathbf{R}$ et $a \in A$. On suppose qu'il existe un intervalle ouvert inclus dans A et qui contient a et que f est dérivable en a. Si f admet un extremum local en a alors ce point est stationnaire : $f'(a) = 0$.*

Exemples 37.2 La fonction dérivable définie par $f(x) = 1 - x^2$ admet un extremum local en 0. Par conséquent $f'(0) = 0$: c'est un point stationnaire. En revanche 0 est un point stationnaire de la fonction dérivable x^3 qui ne possède aucun extrum local.

Proposition 37.2 *Si f est deux fois dérivable en un point stationnaire a et si $f''(a) < 0$ (respectivement $f''(a) > 0$) alors f admet un maximum local en a (respectivement minimum local).*

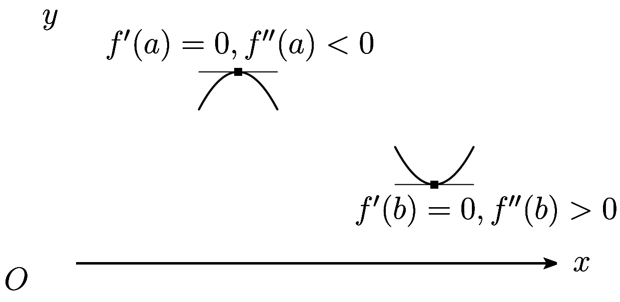


FIGURE 40 – Nature de l'extremum local en fonction de la dérivée seconde

Définition 37.5 On dit que $(a, f(a))$ est **un point d'inflexion** du graphe de f si le graphe de f **coupe** sa tangente en ce point : la fonction $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ s'annule et change de signe en a.

Proposition 37.3 *Supposons que f soit trois fois dérivable en a et que $f''(a) = 0$ et $f^{(3)}(a) \neq 0$. Alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion du graphe de f : le graphe de f* **coupe** *sa tangente en ce point et la fonction $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ s'annule et change de signe en a. Si $f^{(3)}(a) > 0$ elle est négative pour $x < a$ et proche de a puis positive pour $x > a$ et proche de a. Si $f^{(3)}(a) < 0$ elle est positive pour $x < a$ et proche de a puis négative pour $x > a$ et proche de a.*

Exemple 37.3 Le point $(0, 0)$ est un point d'inflexion du graphe du sinus car $\sin''(0) = 0$ quand $\sin'''(0) = -1$.

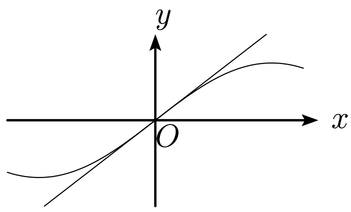


FIGURE 41 – L'inflexion du graphe du sinus en $(0, 0)$

Proposition 37.4 *Soit f une fonction définie et de classe C^2 sur un intervalle I. Si la dérivée seconde f'' ne s'annule pas alors elle est de signe constant sur I et pour tout $a \in I$ la tangente au graphe de f en $(a, f(a))$ ne coupe le graphe qu'en $(a, f(a))$. Si $f'' > 0$ alors le graphe de f est au dessus de ses tangentes et on dit que f est* **convexe**. *Si $f'' < 0$ alors le graphe de f est au dessous de ses tangentes et on dit que f est* **concave**.

38 Règle de L'hospital

Proposition 38.1 *Soient f et g deux fonctions dérivables définies sur un intervalle ouvert I et $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ une des extrémités de l'intervalle. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ ou que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$. Si de plus $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe et*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarque 38.1 Puisque $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ est supposée exister c'est que le quotient $\frac{f'}{g'}$ est défini sur I et donc que g' ne s'annule pas sur I.

Remarque 38.2 Deux fonctions sont dites de **même ordre de grandeur en** a si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. D'après la règle de L'hospital, si f, g, f' et g' sont définies et continues en a et vérifie $f(a) = g(a) = 0$ alors f et g sont de même ordre de grandeur en a dès que f' et g' le sont.

Remarque 38.3 Supposons que f, g, f' et g' soient définies et continues en a, que que $f(a) = g(a) = 0$ et que $g'(a) \neq 0$. On a donc $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x-a}$ et , $g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{x-a} \neq 0$. De plus, puisque f' et g' sont supposées continues en a, on a $\lim_{x\to a} f'(x) = f(a)$ et $\lim_{x\to a} g'(x) = g'(a)$. Ainsi, par la règle de la limite d'un quotient on retrouve les conclusions de L'hospital :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemple 38.1 En appliquant la règle de L'hospital on montre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = 1.$$

Exemple 38.2 Soit f une fonction fonction n fois dérivable telle que $f^{(n)}$ est continue en 0. Si $f(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$ alors en appliquant $n-1$ fois la règle de L'hospital on montre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

39 Plan d'étude d'une fonction numérique

Voici les étapes essentielles dans l'étude d'une fonction numérique d'une variable réelle.

- Recherche du domaine de f
- Réduction du domaine en fonction de la périodicite, de la parité ou d'autres symétries
- Continuité, dérivabilité de f
- Signe de la dérivée
- Limites de f aux bords du domaine de f
- Résumé sous forme d'un tableau de variation
- Recherche des asymptotes éventuelles
- étude des points stationnaires et des points d'inflexion
- Représentation garphique de f

Cinquième partie
Intégration et primitives

40 Primitive

Définition 40.1 Une **primitive** d'une fonction f est une fonction dérivable F dont la dérivée est f.

D'un point de vue cinématique, la fonction f représente une vitesse en fonction du temps et la différence $F(b) - F(a)$ représente la distance comptée algébriquement entre les positions aux temps a et b.

Exemples 40.1 La fonction $x \mapsto x^2 + 4x - 5$ est une primitive de $x \mapsto 2x + 4$. La fonction ln est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty)$. La fonction $x \mapsto 2 + \arcsin(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $[-1, 1]$. La fonction $x \mapsto x|x|$ est une primitive de $x \mapsto 2|x|$.

Proposition 40.1 *Soit F une primitive de f sur un intervalle I, si G est une primitive de f sur I il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $G = c + F$.*

41 Quelques primitives classiques

la fonction f	une primitive F
$x \mapsto x^\lambda$, $\lambda \neq -1$	$x \mapsto \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x} = x^{-1}$	$x \mapsto \ln(\|x\|)$
$x \mapsto \exp(\lambda x)$, $\lambda \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{\lambda}\exp(\lambda x)$
$\cos$	$\sin$
$\sin$	$-\cos$
$\tan$	$-\ln(\|\cos\|)$
$\cosh$	$\sinh$
$\sinh$	$\cosh$
$\tanh$	$\ln(\cosh)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin$ ou $-\arccos$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\arctan$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \mapsto \operatorname{argch}(x)$ ou $\ln\|x + \sqrt{x^2-1}\|$ suivant le domaine
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \mapsto \operatorname{argsh}(x)$ ou $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$
$x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$	$x \mapsto \operatorname{argth}(x)$ ou $\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\|$ suivant le domaine

L'existence d'une formule exacte à l'aide de fonctions usuelles et qui fournit une primitive d'une fonction donnée n'est pas possible en général. Cependant, quand la fonction de départ est assez simple on essaie par des manipulations algébriques de se ramener à des primitives de fonctions appartenant à la liste précédente.

Exemple 41.1 Considérons la fonction f donnée par $f(x) = \frac{2}{x(x-1)(x+1).}$ Pour trouver une primitive de f il suffit d'observer que $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}$. Sous cette forme on obtient que

$$F(x) = \ln(|x-1|) + \ln(|x+1|) - 2\ln(|x|) = \ln\left(\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right|\right) = \ln\left(\left|1 - \frac{1}{x^2}\right|\right)$$

est une primitive de f.

42 Intégrale

L'objet initial de la théorie de l'intégration est de fournir un cadre mathématique rigoureux au calculs des longueurs, des aires et des surfaces. On commence par s'intéresser à l'aire délimitée par la graphe d'une fonction définie sur un segment $[a, b]$. Pour la comprendre on va l'approximer (dans un sens à préciser) par une somme d'aires de rectangles de bases égales mais de hauteurs variables. Les bases de ces rectangles divisent régulièrement le segment $[a, b]$.

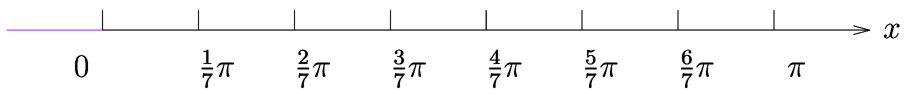


FIGURE 42 – Division du segment $[0, \pi]$ en 7 intervalles de longueur $\frac{\pi}{7}$

Définition 42.1 Soient une fonction continue f et un segment $[a, b]$ inclus dans le domaine de f. Si $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ on pose

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n} k).$$

La somme I_n s'appelle **somme de Riemann** associée à f. Si la limite $\lim_{n \to +\infty} I_n$ existe et appartient à $\mathbf{R}$ alors on appelle cette limite **intégrale de f entre a et b** et on la note

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Théorème 42.1 *Dès que la fonction f est continue sur un intervalle borné et fermé I, si $a \in I$ et $b \in I$, alors l' intégrale de f entre a et b existe.*

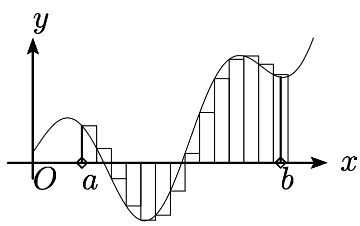


FIGURE 43 – Une fonction continue f et une approximation en escaliers sur un segment $[a, b]$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ **représente l'aire comptée algébriquement** comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des x et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Pour définir mathématiquement cette aire on *approxime* la fonction f par une fonction **en escaliers** f_n qui vaut $f(a + \frac{b-a}{n}k)$ sur les intervalles $[a + \frac{b-a}{n}k, a + \frac{b-a}{n}(k+1)]$, $k = 0, ..., n-1$. L'aire associée à f_n est I_n :

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n} k) = \int_a^b f_n(x)dx.$$

On considère que I_n approxime l'aire associée à f.

Exemple 42.1 Soient $f(x) = x, a = 0, b = 1$. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On a

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2} = \int_0^1 x dx.$$

Définition 42.2 Si $\int_a^b f(x)dx$ est définie on pose $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

43 Premières propriétés

Proposition 43.1 (**linéarité de l'intégrale**) *Soient f et g continues sur un intervalle I, $a, b \in I$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.*

— $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

— $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx$

Proposition 43.2 (**comparaison à** 0) *Soit f continue sur un intervalle I et soit $[a, b] \subset I$.*

— *Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ alors* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

— *Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ alors* $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

On déduit de cette proposition les inégalités suivantes.

Proposition 43.3 *Soient f et g continues sur un intervalle I, $[a, b] \subset I$ et $m \leq M \in \mathbf{R}$.*

— *Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ alors* $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ (**comparaison**)

— *Si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$ alors*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad \textbf{(Inégalité de la moyenne)}$$

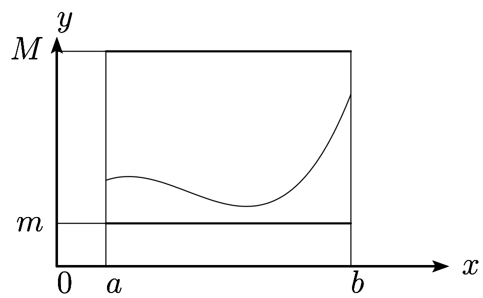


FIGURE 44 – Les aires $m(b-a)$ et $M(b-a)$ encadrent l'aire $\int_a^b f(x)dx$

Définition 43.1 Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ s'appelle **valeur moyenne de f sur le segment** $[a,b]$.

Si on applique le théorème des accroissements finis on obtient le résultat suivant.

Proposition 43.4 (**propriété de la valeur moyenne**) *Soient f continue sur un intervalle I et $a \neq b \in I$. Alors il existe c entre a et b tel que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

En d'autres termes la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est prise au moins une fois.

Proposition 43.5 *Soit f continue sur un intervalle I et soit $a, b, c \in I$. Alors*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad (\textbf{Relation de Chasles}).$$

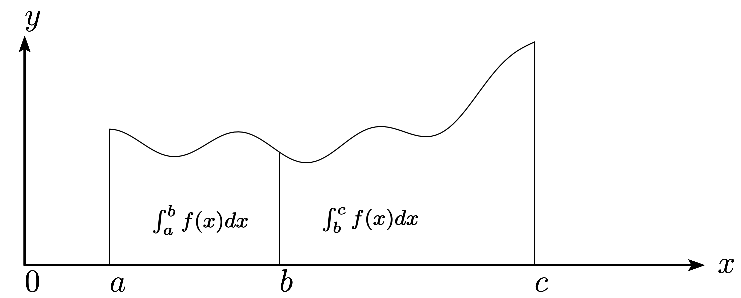


Figure 45 – La relation de Chasles d'addition des aires

44 Intégrales et primitives

Théorème 44.1 *Soient f une fonction continue sur un intervalle I, $a \in I$ et $x \in I$, alors l'intégrale $\int_a^x f(t)dt := F(x)$ est une primitive de f sur I.*

De plus pour tout $b \in I$ et toute primitive G de f sur I on a $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$.

Exemple 44.1 Soient $f(x) = x, a = 0, b = 1$. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On a vu précédemment que

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})$$

et donc

$$\int_0^1 xdx = \lim_{n\mapsto+\infty} I_n = \frac{1}{2} = [\frac{x^2}{2}]_0^1.$$

Notation 44.1 Si F est une fonction et $[a,b]$ est inclus dans le domaine de F on pose $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ et $F(a) - F(b) = [F(x)]_b^a$.

Définition 44.1 Soient f une fonction continue sur un intervalle I, $a \in I$ et $x \in I$ on appelle la primitive $\int_a^x f(t)dt$ qui s'annule en a **intégrale fonction de sa borne supérieure**.

45 Intégrales impropres

Définition 45.1 Soit f continue sur un intervalle ouvert $I =]A, B[$ (avec A et B dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) et soit a dans I. Si la limite $\lim_{b \to B} \int_a^b f(x)d(x)$ existe et appartient à $\mathbf{R}$ on appelle cette limite **intégrale impropre de f sur** $[a, B[$ et on la note $\int_a^B f(x)d(x)$. De même si la limite $\lim_{b \to A} \int_b^a f(x)d(x)$ existe et appartient à $\mathbf{R}$ on appelle cette limite **intégrale impropre de f sur** $]A, a]$ et on la note $\int_A^a f(x)d(x)$. Enfin si les intégrales impropres $\int_a^B f(x)d(x)$ et $\int_A^a f(x)d(x)$ existent on pose $\int_A^B f(x)d(x) = \int_A^a f(x)d(x) + \int_a^B f(x)d(x)$ et ceci définit **l'intégrale impropre de f sur** $]A, B[$.

Exemple 45.1 On a $\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = 1 - \frac{1}{b}$ qui tend vers 1 quand b tend vers $+\infty$ mais qui tend vers $-\infty$ quand b tend vers 0. Par conséquent on a $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1$ mais l'intégrale impropre de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $]0, 1]$ n'est pas définie.

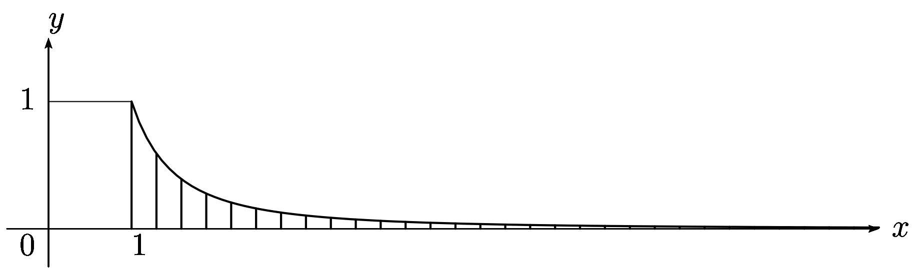


FIGURE 46 – L'aire $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ est égale à 1

Théorème 45.1 *Soient f et g continues sur $]A, B[$ et $a \in]A, B[$. On suppose que $|f| \leq g$. Si g possède une intégrale impropre sur $[a, B[$ (respectivement $]A, a]$) alors f en possède également et*

$$\left| \int_a^B f(x)d(x) \right| \leq \int_a^B g(x)d(x)$$

(respectivement $\left| \int_A^a f(x)d(x) \right| \leq \int_A^a g(x)d(x)$).

Exemple 45.2 La fonction $x \mapsto |\frac{\sin(x)}{x^2}|$ est majorée sur $[2\pi, +\infty)$ par la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $\int_{2\pi}^\infty \frac{1}{x^2}dx$ existe et vaut $\frac{1}{2\pi}$. Par conséquent $\int_{2\pi}^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}dx$ existe et est compris entre $-\frac{1}{2\pi}$ et $\frac{1}{2\pi}$.

La définition suivante généralise encore un peu plus la notion d'intégrale.

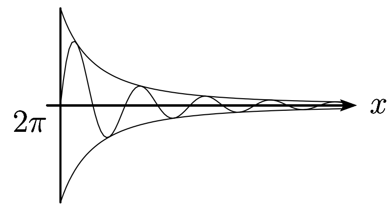


FIGURE 47 – Les fonctions $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ sur $[2\pi, +\infty)$

Définition 45.2 Soient $f$une fonction et $a = a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1} = b$ des réels. Si pour $i = 1, ..., n$ l'intégrale (éventuellement impropre) $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$ est définie alors on définit $\int_a^b f(x)dx$ par

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx.$$

à l'exception de la propriété de la valeur moyenne et de l'existence de primitive, toutes les propriétés vues précédemment (linéarité, comparaison, inégalité de la moyenne, relation de Chasles) restent vraies pour cette généralisation des intégrales.

Exemple 45.3 La fonction *en escaliers* f définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1[$ et $f(x) = 2$ si $x \in [1, 2]$ vérifie

$$\int_0^2 f(x)dx = 3.$$

La fonction f n'a pas de primitive et la propriété de la valeur moyenne n'est pas vérifiée car $f(x) \neq \frac{3}{2}$ si $x \in [0, 2]$.

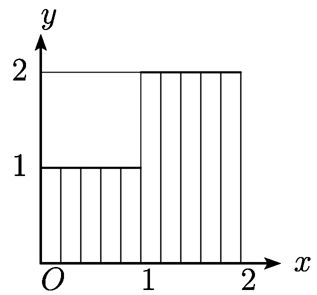


FIGURE 48 – Intégrale d'une fonction en escalier (deux marches)

46 Trois méthodes d'intégration

Définition 46.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I, continue et dérivable. Si f ne s'annule pas sur I on appelle **dérivée logarithmique de** f la fonction $\frac{f'}{f}$.

Proposition 46.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, continue et dérivable. Si f ne s'annule pas sur I alors la fonction* $\ln(|f|)$ *est une primitive de la dérivée logarithmique* $\frac{f'}{f}$ *:*

$$(\ln(|f|))' = \frac{f'}{f}.$$

Exemple 46.1 La fonction $\ln(1 + x^2 + \sin(x))$ est une primitive de la fonction $\frac{2x+\cos(x)}{1+x^2+\sin(x)}$.

Proposition 46.2 Intégration par parties *Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées f' et g' sont continues. Si $[a, b] \subset I$ alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

avec $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Exemple 46.2 Le calcul de $\int_0^\pi x\sin(x)dx$ se fait par intégration par parties. On prend $f(x) = x$ et $g = -\cos$. On a donc $f' = 1$ et $g' = \sin$. Ceci donne

$$\int_0^\pi x\sin(x)dx = [-x\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x) = [\sin(x) - x\cos(x)]_0^\pi = \pi.$$

Proposition 46.3 Changement de variable *Soient I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$, $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue et $\phi : J \to I$ une fonction dérivable et dont la dérivée est continue. Alors pour $\alpha, \beta \in J$ on a*

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)du.$$

Exemple 46.3 Le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)\cos(u)du$ se fait par un changement de variable. On pose ici $f(t) = t^2$ et $\phi = \sin$. On a $\phi' = \cos$, $\phi(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\phi(0) = 0$. Par conséquent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)\cos(u)du = \int_0^1 t^2dt = \frac{1}{3}.$$

Exemple 46.4 On veut calculer l'aire comprise entre le demi-cercle unité supérieur, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$. Or le demi-cercle supérieur est le graphe de la fonction $\sqrt{1-t^2}$. On doit donc calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}dt$. Ce calcul se fait par un changement de variable.

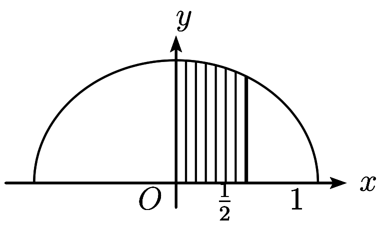


FIGURE 49 – Aire d'une portion de disque

On pose ici $\phi = \cos$. On a $\phi' = -\sin$, $\phi(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $\phi(\frac{\pi}{2}) = 0$. Par conséquent, puisque $\sin(u) = \sqrt{1-\cos^2(u)}$ si $u \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} -\sin^2(u)du = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)du = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2u)}{2}du = [\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

47 Longueur d'une courbe, aire d'une surface de révolution

Longueur dune courbe Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I et dont la dérivée est continue. Soit $[a, b] \subset I$ et $t \in]0, b-a[$. On note N_t la partie entière de $\frac{b-a}{t}$ et si $k = 0, ..., N_t + 1$ on pose $a_k = a + kt$. Sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ (avec $k = 0, ..., N_t$) on approxime f par son approximation affine $x \mapsto f(a_k) + f'(a_k)(x - a_k)$. D'après le théorème de Pythagore, la longueur du segment de droite $x \in [a_k, a_{k+1}] \mapsto f(a_k) + f'(a_k)(x - a_k)$ est égale à $(a_{k+1} - a_k)\sqrt{1 + f'(a_k)^2}$ ou encore $t\sqrt{1 + f'(a_k)^2}$ car $(a_{k+1} - a_k) = t$. De plus la somme $L_t = t\sum_{k=0}^{N_t} \sqrt{1 + f'(a_k)^2}$ tend vers $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$ lorsque t tend vers 0.

Définition 47.1 La **longueur de la courbe** $\gamma : t \in [a, b] \mapsto (t, f(t))$ est

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

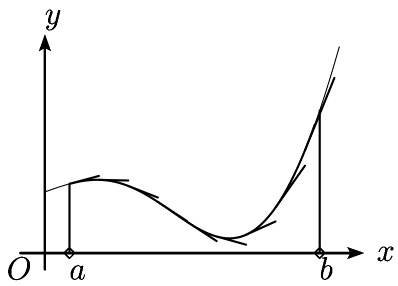


Figure 50 – Approximation d'une courbe par des *segments de droites tangentes*

Exemple 47.1 Appliquons cette définition à la fonction définie par $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ avec $-r < a < b < r$. Puisque le graphe de cette fonction est le demi-cercle supérieur de rayon r centré à l'origine on va calculer la longueur de la portion du demi cercle comprise entre $x = a$ et $x = b$. On a $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ et donc $\sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Par conséquent on obtient

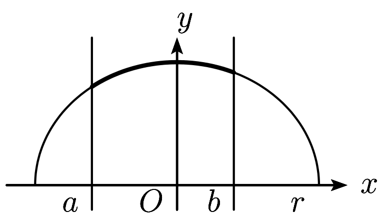


Figure 51 – Portion de cercle

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = \int_a^b \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx = r(\arccos(\frac{a}{r}) - \arccos(\frac{b}{r})).$$

Ceci correspond bien à la longueur attendue de la portion du demi cercle comprise entre $x = a$ et $x = b$.

Exemple 47.2 La longueur $l(a,b)$ de l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ avec $x \in [a,b]$ est

$$l(a,b) = \int_a^b \sqrt{1+4x^2}dx.$$

En posant $2x = \sinh(t)$ on obtient

$$l(a,b) = \frac{1}{2}\int_{\operatorname{argsh}(2a)}^{\operatorname{argsh}(2b)} \cosh^2(t)dt = \frac{1}{4}\int_{\operatorname{argsh}(2a)}^{\operatorname{argsh}(2b)} \cosh(2t)+1dt = \left[\frac{\sinh(2t)+2t}{8}\right]_{\operatorname{argsh}(2a)}^{\operatorname{argsh}(2b)}.$$

Exemple 47.3 La longueur $l(a,b)$ de l'arc de *chaînette* $y = \cosh(x)$ avec $x \in [a,b]$ (c'est le nom du graphe du cosinus hyperbolique car on peut démontrer que c'est la forme d'une chaînette fixée en deux points sous l'action de la pesanteur) est

$$l(a,b) = \int_a^b \sqrt{1+\sinh^2(x)}dx = \int_a^b \cosh(x)dx = \sinh(b)-\sinh(a).$$

Aire d'une surface de révolution On conserve les notations précédentes ($f, [a,b], t$ et N_t) et on suppose la fonction f positive. Considérons la surface de révolution définie par

$$(h,\theta) \in [a,b]\times[0,2\pi] \mapsto (\cos(\theta)f(h), \sin(\theta)f(h), h).$$

De la même façon qu'on approxime la longueur d'un petit morceau de courbe par la longueur

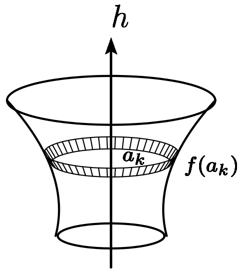


FIGURE 52 – Surface de révolution

d'un segment on peut approximer l'aire de la portion de surface de révolution comprise entre les hauteurs a_k et a_{k+1} par $2\pi f(a_k)t\sqrt{1+f'(a_k)^2}$. Or la somme $S_t = t\sum_{k=0}^{N_t} 2\pi f(a_k)\sqrt{1+f'(a_k)^2}$ tend vers $\int_a^b 2\pi f(h)\sqrt{1+f'(h)^2}dh$ lorsque t tend vers 0.

Définition 47.2 L'**aire de la surface de révolution** $(h,\theta) \in [a,b]\times[0,2\pi] \mapsto (\cos(\theta)f(h), \sin(\theta)f(h), h)$ est

$$\int_a^b 2\pi f(h)\sqrt{1+f'(h)^2}dh.$$

Exemple 47.4 Appliquons cette définition à la fonction donnée par $f(h) = \lambda h$ pour $h > 0$ avec $\lambda > 0$. Puisque le graphe de cette fonction est une demi-droite qui arrive à l'origine, par révolution il engendre un cône de révolution. On va donc pouvoir calculer l'aire de la portion de cône comprise entre $h = a > 0$ et $h = b > 0$ en appliquant la formule précédente. On obtient

$$\int_a^b 2\pi f(h)\sqrt{1+f'(h)^2}dh = \int_a^b 2\pi\lambda h\sqrt{1+\lambda^2}dh = \pi\lambda\sqrt{1+\lambda^2}(b^2-a^2).$$

Ceci correspond bien à l'aire attendue de la portion de cône comprise entre $h = a$ et $h = b$.

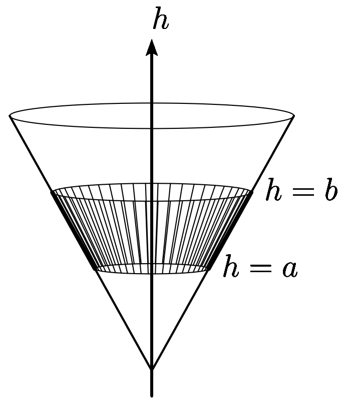


FIGURE 53 – Portion de cône

Exemple 47.5 Appliquons cette définition à la fonction donnée par $f(h) = \sqrt{r^2 - h^2}$ avec $-r < a < b < r$. Puisque le graphe de cette fonction est un demi-cercle de rayon r centré à l'origine, par révolution il engendre une sphère de rayon r. On va donc pouvoir calculer l'aire de la portion de sphère comprise entre $h = a$ et $h = b$ en appliquant la formule précédente. On

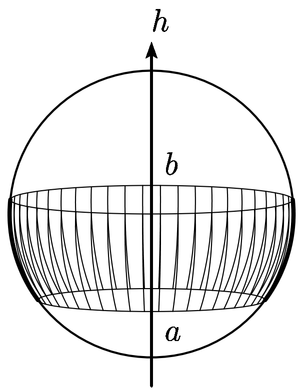


FIGURE 54 – Portion de sphère

obtient

$$\int_a^b 2\pi f(h)\sqrt{1 + f'(h)^2}dh = \int_a^b 2\pi r dh = 2\pi r(b - a).$$

Ceci correspond bien à l'aire attendue de la portion de sphère comprise entre $h = a$ et $h = b$.

Exemple 47.6 Soient $0 < r < R$. Considérons un cercle vertical de rayon r dont le centre est à une distance R de l'axe Oh. En faisant tourner ce cercle autour de l'axe vertical, on engendre un tore. On obtient donc ce tore par révolution des graphes des fonctions données par $f(h) = R + \sqrt{r^2 - h^2}$ et $g(h) = R - \sqrt{r^2 - h^2}$ sur $[-r, r]$. On a

$$f(h)\sqrt{1 + f'(h)^2} + g(h)\sqrt{1 + g'(h)^2} = \frac{2Rr}{\sqrt{r^2 - h^2}}.$$

Par conséquent en appliquant la formule précédente à ces deux fonctions on obtient que l'aire du tore est égale à

$$\int_{-r}^{r} 2\pi \left[f(h)\sqrt{1 + f'(h)^2} + g(h)\sqrt{1 + g'(h)^2}\right] dh = \int_{-r}^{r} 2\pi \frac{2Rr}{\sqrt{r^2 - h^2}} dh$$

c'est à dire $4\pi^2 Rr$.

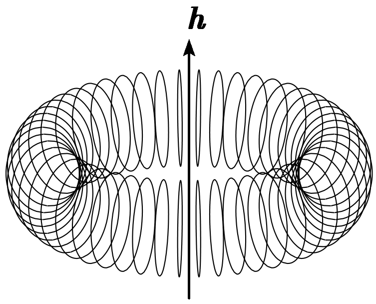


FIGURE 55 – Tore

48 Développement de Taylor avec reste intégral

Le théorème qui lie l'intégrale d'une fonction continue et la variation de sa primitive admet le corollaire suivant.

Théorème 48.1 *Soit $f : I \to$ une fonction dérivable définie sur un intervalle ouvert I. On suppose que f' est continue sur I. Si $b \in I$ et $a \in I$ alors*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx.$$

Ce théorème admet la généralisation suivante pour les fonctions qui sont n fois dérivables.

Théorème 48.2 *(***Formule de Taylor avec reste intégral***) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $f : I \to$ une fonction n fois dérivable définie sur un intervalle ouvert I telle que $f^{(n)}$ soit continue sur I. Si $b \in I$ et $a \in I$ alors*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dx.$$

On déduit de ce théorème et des critères de comparaison des intégrales le résultat suivant.

Corollaire 48.1 *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction n fois dérivable telle que $f^{(n)}$ soit continue. Soit $[a,b] \subset I$. On suppose qu'il existe $m < M$ tels que pour tout $x \in [a,b]$ on a $m \le f^{(n)}(x) \le M$. Alors*

$$\frac{(b-a)^n}{n!} m \le f(b) - f(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \le \frac{(b-a)^n}{n!} M.$$

Exemple 48.1 Si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ alors

$$|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Exemple 48.2 Si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ alors

$$|\sin(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}| \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Exemple 48.3 Si $n \in \mathbf{N}^*$, $x \in \mathbf{R}$, $0 \leq y$ et $x \leq y$ alors

$$| \exp(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k | \leq \frac{|x|^n}{n!} \exp(y).$$

Exemple 48.4 Si $n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leq x$ alors

$$| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k | \leq \frac{1}{n+1}.$$

Sixième partie

Les fonctions de deux ou trois variables réelles

49 Fonctions numériques de deux ou trois variables et continuité

Définition 49.1 On appelle pavé ouvert de $\mathbf{R}^2$ (respectivement de $\mathbf{R}^3$) un ensemble de la forme $I_1 \times I_2$ (respectivement de la forme $I_1 \times I_2 \times I_3$) où les I_k sont des intervalles ouverts non vides de $\mathbf{R}$.

Définition 49.2 Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ (respectivement de $\mathbf{R}^3$), soit $a \in \mathbf{R}^2$ (respectivement $a \in \mathbf{R}^3$) et soit $l \in \mathbf{R}$. On dit qu'une fonction numérique f définie sur A admet l comme limite en a si d'une part il existe des points de A arbitrairement proches de a, c'est à dire dont les coordonnées sont arbitrairement proches de celles de a et si d'autre part les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque $x \in A$ est arbitrairement proche de a.

Notation 49.1 Comme dans le cadre des fonctions numériques de la variable réelle, l'écriture $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ signifie que f possède une limite égale à l en a.

Remarque 49.1 (culturelle) La phrase *Les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans A* est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un pavé ouvert non vide J contenant a et tel que l'image $f(J)$ soit incluse dans I* :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, [(\forall i = 1,2 (\text{respectivement } i = 1,2,3), |x_i - a_i| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)].$$

Proposition 49.1 *Si f possède une limite en a cette limite est unique.*

Remarque 49.2 Soit $f : A \to \mathbf{R}$ et soit $a \in A$. Si f possède une limite en a alors cette limite vaut $f(a)$.

Définition 49.3 Soient $f : A \to \mathbf{R}$ et $a \in A$. On dit que f est **continue en** a si f possède une limite en a. Dans ce cas nécessairement cette limite vaut $f(a)$.

Remarque 49.3 Ici, il est **important** que a appartienne à A.

Définition 49.4 On dit que $f : A \to \mathbf{R}$ est **continue** si f est continue en a pour tout $a \in A$.

50 Fonctions continues de une à trois variables et à valeurs dans R, $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$

Définition 50.1 Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ avec $n = 1, 2$ ou 3, soit $a \in \mathbf{R}^n$. On dit qu'une fonction f définie sur A et à valeurs dans $\mathbf{R}^m$ avec $m = 1, 2$ ou 3 admet $l \in \mathbf{R}^m$ comme limite en a si chacune de ses fonctions coordonnées admet comme limite en a la coordonnée correspondante de l.

Proposition 50.1 *Soient A, B et C des sous-ensembles de $\mathbf{R}^p$, de $\mathbf{R}^q$ et de $\mathbf{R}^r$ avec $p, q, r \in \{1, 2, 3\}$. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions. Soient $a \in \mathbf{R}^p$, $b \in \mathbf{R}^q$ et $c \in \mathbf{R}^r$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{y \to b} g(y) = c$ alors $\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$.*

Remarque 50.1 La simplicité de cet énoncé résulte du choix qu'on a fait de la définition de limite.

Définition 50.2 Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ avec $n = 1, 2$ ou 3 et soit $a \in \mathbf{R}^n$. On dit qu'une fonction f définie sur A et à valeurs dans $\mathbf{R}^m$ avec $m = 1, 2$ ou 3. Soit $a \in A$. On dit que f est continue en a si f admet une limite en a. On dit que f est continue si f est en continue en tout $a \in A$.

Proposition 50.2 *Si A et B sont des sous-ensembles de $\mathbf{R}$, de $\mathbf{R}^2$ ou de $\mathbf{R}^3$ et si $f : A \to \mathbf{B}$ et $g : B \to \mathbf{R}$ sont continues alors $g \circ f : A \to \mathbf{R}$ est continue.*

51 Dérivées partielles de fonctions numériques de deux ou trois variables

Définition 51.1 Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ (respectivement de $\mathbf{R}^3$) et soit $a \in \mathbf{R}^2$ (respectivement $a \in \mathbf{R}^3$). On note (x, y) les coordonnées de $\mathbf{R}^2$ (respectivement (x, y, z) les coordonnées de $\mathbf{R}^3$). On suppose qu'il existe un pavé ouvert inclus dans A et contenant a. Si la fonction qui à t réel associe $f(a_1 + x, a_2)$ (respectivement $f(a_1 + x, a_2, a_3)$) est dérivable en 0 de dérivée l on dit que l est la dérivée partielle de f par rapport à x en a et on pose $\frac{\partial}{\partial x} f(a)$. Les dérivées partielles par rapport à y et z se définissent de façon analogue.

Exemple 51.1 La fonction f de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ admet des dérivées partielles par rapport à chacune des coordonnées en tout $a \in \mathbf{R}^3$ et on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = 2x, \ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = 2y, \ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = 2z.$$

Définition 51.2 Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ ou de $\mathbf{R}^3$ et soit $f : A \to \mathbf{R}$. On dit que f admet un **maximum local** en a (respectivement **minimum local**) s'il existe un pavé P ouvert qui contient a et contenu dans A tel que $f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$) pour tout $x \in P$.

Proposition 51.1 *Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ (respectivement de $\mathbf{R}^3$) et soit $a \in \mathbf{R}^2$ (respectivement $a \in \mathbf{R}^3$). On note (x, y) les coordonnées de $\mathbf{R}^2$ (respectivement (x, y, z) les coordonnées de $\mathbf{R}^3$). On suppose qu'il existe un pavé ouvert inclus dans A et contenant a. Si la fonction f admet un extremum local en a et si f admet des dérivées partielles en a alors ces dernières sont nulles.*

Exemple 51.2 La fonction f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$ admet des dérivées partielles par rapport à x et à y en tout point et on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2x, \ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -2y.$$

Or ces deux dérivées partielles sont simultanément nulles seulement en $(0, 0)$. Donc, si f admet un extremum c'est nécessairement en $= (0, 0)$. Mais $0 = (0, 0)$ n'est pas un extremum local car la restriction de f à $\{x = 0\}$ est strictement négative sauf à l'origine et la restrcition de f à $\{y = 0\}$ est strictement positive sauf à l'origine.

Table des matières