Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2021-2022

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 1 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Résumé des séances

L'enseignement de CMP3 repose sur un document pdf appelé cmp3-2021-2022.pdf et accessible dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams.

Les notes écrites en cours avec la tablette sont aussi accessibles dans l'espace documentaire associé à l'équipe PASS Maths CMP1 et CMP3 de Teams.

05/01. La séance est consacrée à une introduction au nombres complexes. L'ensemble $\mathbf{C}$ des complexes est présenté et ses propriétés qui en font un corps commutatif et un $\mathbf{R}$-espace vectoriel sont énoncées. L'identification de $\mathbf{R}$ comme sous-ensemble de $\mathbf{C}$ est donnée. Les notions de partie réelle, de partie imaginaire, de module, d'argument d'un nombre complexe et la notion d'exponentielle complexe sont expliquées. La correspondance entre l'ensemble $\mathbf{C}$ et le plan de la géométrie euclidienne est expliquée. La résolution dans $\mathbf{C}$ de l'équation $z^2 = 1$ est établie (dont les solutions sont $i = (0,1)$ et $-i = (0,-1)$) est expliquée. Quelques produits, carrés et inverses de nombres complexes sont calculés. Le théorème de D'Alembert-Gauss est énoncé.

12/01. La séance est consacrée à la résolution dans $\mathbf{C}$ de l'équation du second degré d'inconnue z et à coefficients $a,b,c \in \mathbf{C}$, $az^2+bz+c=0$. Le cas réel (recherche de solutions réelles lorsque $a,b,c \in \mathbf{R}$) est aussi traité. Deux méthodes algébriques qui permettent de calculer les racines d'un nombre complexe aussi sont données. Sont aussi établies les relations entre coefficients et racines d'une équation du type $z^2 - sz + p = 0$.

19/01. Les formules

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

et

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

sont établies géométriquement. La preuve utilise Thales, Pyrhagore et de façon un peu abusive, un dessin. Ensuite sont établies les formules d'Euler et de Moivre (ou De Moivre). La parité du cosinus ($\cos(x) = \cos(-x)$) et l'imparité du sinus ($\sin(x) = -\sin(-x)$) sont citées au préalable. Le calcul de $\cos(3\theta)$ et $\sin(2\theta)$ est donné comme application des formules de Moivre et de l'identité remarquable

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

après démonstration de cette dernière. La formule du binôme de Newton,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k},$$

est donnée sans démonstration et il est expliqué comment en combinant cette dernière avec les formules de Moivre on peut calculer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de termes de type $\cos^k(\theta)\sin n-k(\theta)$, $k=0,...,n$. Les solutions complexes de l'équation $z^n=1$, c'est à dire les racines n^{e} de l'unité sont données et il est montrer que leur somme vaut 0. Ce résultat repose sur l'identité

$$(x^n-y^n)=(x-y)\times\sum_{k=0}^{n-1}x^ky^{n-1-k}$$

qui est énoncée en même temps que l'identité

$$\frac{x^n-1}{x-1}=\sum_{k=0}^{n-1}x^k$$

lorsque x est un complexe différent de 1.

26/01. La séquence sur les complexes est terminée par la preuve des deux égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\frac{2\pi}{n}k)=0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1}\sin(\frac{2\pi}{n}k)=0.$$

L'essentiel de la séance est consacrée à une introduction aux fonctions numériques d'une variable réelle. Les notions d'ensemble de départ et d'ensemble d'arrivée sont données. Les opérations algébriques sur les fonctions numériques sont expliquées. Plusieurs exemples sont présentés : les fonctions indicatrices de sous-ensembles de $\mathbf{R}$ et leurs relations avec les opérations ensemblistes (intersection, réunion...) ; les fonctions constantes, les fonctions affines, les fonctions polynomiales, les homographies et les fonctions rationnelles. L'égalité $\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)$ si $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$ est prouvée.

02/02. Il s'agit d'une séance double au cours de laquelle sont abordées quelques propriétés théoriques des fonctions polynomiales réelles et des polynômes.

Il est expliqué la différence entre fonction polynomiale et polynôme en l'illustrant avec ce qui se passe dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ où les polynômes $1+X+X$ et 1 définissent la même fonction polynomiale sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

La notion de degré d'un polynôme et les propriétés classique du degré sont données.

La division euclidienne des polynômes est établie.

La notion de dérivation formelle des polynômes est étudiée et il est établi qu'un polynôme est divisible par $(X-R)^n$ si et seulement si $P(R)=P'(R)=...P^{(n-1)}=0$ (preuve à achever lors de la prochaine séance).

09/02. La preuve de du critère de divisibilité d'un polynôme par $(X-R)^n$ est achevée. C'est l'occasion de fixer la définition de multiplicité d'un zéro d'un polynôme.

L'essentiel de la séance est consacré à donner des approximations de π, d'abord à l'aide de la géométrie en considérant des polygones réguliers inscrits ou tangents au cercle unité, ensuite en développant des arguments d'analyse et la méthode de Machin qui, combinés à la trigonométrie et à la formule $\frac{\pi}{4}=\arctan(\frac{1}{2})+\arctan(\frac{1}{3})$ qui est établie préalablement, permettent d'obtenir avec peu de calculs que π est compris entre $3,14$ et $3,15$.

Au cours de la séance l'identité

$$1+t+t^2+...+t^n=\frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

est rapidement établie puis utiliser pour encadrer $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ puis $\arctan(y)$.

02/03. La séance est consacrée à une présentation de l'exponentielle, du logarithme népérien, des fonctions trigonométriques hyperboliques et des réciproques de ces dernières. Il est expliqué le lien entre ces fonctions hyperboliques et la courbe appelée hyperbole. En fin de séance il est expliquée comment montrer que si $x > 0$ alors

$$\exp(x) \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n.$$

09/03. On prouve dans la première et principale partie de la séance que si $K > 0$, $x \in [-K, K]$ et $n \in \mathbf{N}$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k - \frac{1}{n!}(2K)^n \exp(K)K \leq \exp(x) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + \frac{1}{n!}(2K)^n \exp(K)K.$$

La preuve repose sur la notion d'intégrale et ses liens avec celle de dérivée. Ceci est très rapidement expliqué tout comme la notion d'intégration par parties. La formule générale d'intégration par parties est établie à partir de la formule de Leibniz $(uv)' = u'v + uv'$ de la dérivée d'un produit.

Il est aussi prouvé pour illustrer comment marche l'intégration par parties les égalités

$$\int_1^2 \ln(t)dt = 2\ln(2) - 1 \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(t) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

La seconde et courte partie de la séance est consacrée à la définition quantifiée et formelle de ce qu'est une fonction numérique de la variable réelle continue en un point de son ensemble de départ. Cette définition est illustrée avec la fonction δ de Dirac qui n'est pas continue en 0 et avec les fonctions affines de la forme $f(x) = \lambda x + \mu$ (avec $\lambda \neq 0$) dont on établit la continuité en tout point de $\mathbf{R}$.

16/03. La notion de limite finie d'une fonction est introduite. Cette notion est comparée à celle de continuité et il est montrée qu'une fonction admet une limite en un point a donné de son ensemble de départ si et seulement si elle admet une limite en ce point et alors la valeur de la fonction en a et la limite sont égales. Un exemple de fonction qui n'admet pas de limite en 0 est donné. Il s'agit de f définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$. Pour illustrer la notion de limite il est montré comment à partir de l'inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$ qui est expliquée (et non démontrée), on peut montrer que la fonction f de $\mathbf{R}^*$ définie par $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x}$ admet 0 comme limite en 0. La notion de prolongement par continuité est introduite et illustrée à partir de cette fonction f.

On donne ensuite un énoncé général sur les propriétés algébriques en lien avec la continuité. Cet énoncé est partiellement prouvé. En particulier on démontre en détail que si f et g sont continues en a alors $f + g$ et fg le sont aussi.

On donne comme corollaire important le fait que les fonctions rationnelles sont continues en tout point où elles sont définies.

Il est enfin montré que la continuité de la fonction sin en 0 est une conséquence assez directe de l'inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$.

30/03. On établit la continuité de la fonction racine carrée. Ensuite on montre que la composée de fonctions continues est continue. On en déduit, sachant la continuité du sinus en 0, que le cosinus est continu en 0. On obtient de façon plus générale, en utilisant les formules d'addition des angles, que les fonctions cosinus et sinus sont partout continues : plus précisément on montre que si $a \in \mathbf{R}$ alors les fonctions $h \in \mathbf{R} \mapsto \cos(a+h)$ et $h \in \mathbf{R} \mapsto \sin(a+h)$ sont continues en 0.

On énonce le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de l'image d'un segment par une fonction continue. On esquisse des preuves de ces deux résultats en évoquant la méthode par dichotomie.

Dans une deuxième partie on introduit la notion de dérivation, dérivabilité et dérivée. On montre que les fonctions affines, que les monômes $x^n, n \in \mathbf{N}$ et que la raciné carrée (sur $\mathbf{R}^{+*}$) sont dérivables et on calcule leurs nombres dérivés.

06/04. On énonce les principales propriété algébriques et de composition de la dérivation. On établit que si une fonction est dérivable en un point alors elle est continue en ce point. On montre aussi l'équivalence pour une fonction numérique de la variable réelle $f : I \to \mathbf{R}$ avec $I \subset \mathbf{R}$ entre être dérivable en $a \in I$ et l'existence d'une fonction $\varepsilon : I \to \mathbf{R}$ nulle en a et continue en a et d'un nombre L tels que si $x \in I$ alors $f(x) = f(a) + L \cdot (x-a) + \varepsilon(x) \cdot (x-a)$. On démontre que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables en tout a réel et que $\sin'(a) = \cos(a)$ et $\cos'(a) = -\sin(a)$. Pour obtenir ces résultats on part de la double inégalité

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qu'on explique puis on travaille à l'aide des formules qui donnent $\sin(a+x)$ et $\cos(a+x)$. On utilise aussi en l'admettant une méthode de calcul de limite par encadrement [si $f \leq g \leq h$ et si f et h ont même limite en un point alors cette limite est aussi la limite de g en ce point].

03/05. Dans un premier temps on étudie les relations en dérivation et variation. On établit en particulier les théorèmes de Rolle et des accroissements finis. On démontre comme résultat préliminaire et fondamental qu'une fonction f qui admet une limite non nulle en un point a de $\mathbf{R}$ est du signe de cette limite en tout x du domaine de définition de f qui est dans un intervalle du type $]a-K, a+K[$.

On fait une très brève introduction aux fonctions de plusieurs variables en en donnant quelques exemples issus de la géométrie et de l'algèbre linéaire.

On conclut la partie cours de cette dernière séance de l'année par une présentation de la notion d'intégrale, de sa relation avec celle de dérivation. On donne une esquisse de preuve du théorème fondamental de l'analyse et on finit cette partie en donnant une présentation du logarithme comme primitive de la fonction qui à $x > 0$ associe son opposé.

Enfin on répond aux questions sur le contrôle continu blanc qui a été donné pour préparer le second contrôle.